Devoir Surveille N°4 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (10 points)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :

- 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
- Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
- La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »
- C : « l'arbre choisi est un conifère »
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu »

(a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
(c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0,525$.
(d) L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} près.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation dans le cadre de l'exercice.
(c) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3} près.
(d) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, on choisi au hasard un échantillon de n arbres dans cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de n arbres dans le stock. On appelle Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

(a) On note A_n l'événement « au moins un des n arbres choisis est un conifère ».
Démontrer que la probabilité de l'événement A_n est égale à $1-0,475^n$.
(b) Déterminer avec la calculatrice la taille minimale n de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$.
(c) Déterminer la taille n minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères.
(d) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (2 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

Exercice 3 (8 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un pingouin est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un pingouin choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un pingouin choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

- T_n : « le pingouin utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le pingouin utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

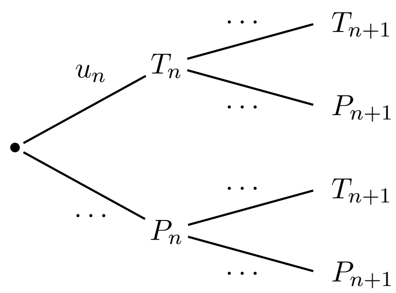
$$u_n = P(T_n)$$

où $P(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1. **(a)** Donner les valeurs des probabilités $P(T_1)$, $P(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $P_{T_1}(T_2)$, $P_{P_1}(T_2)$.

   (b) Démontrer que $P(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{2}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

   (f) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Bonus

Répondre à la question **3.(b)** de l'**Exercice 1** en résolvant une inéquation à l'aide de la fonction logarithme népérien.
On pourra utiliser les propriétés suivantes si besoin :

- La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $]0;+\infty[$ et est strictement croissante sur cet intervalle.
- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.