Correction Devoir Surveille N°3 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 5\right)(3-n)$ **2.** $v_n = \dfrac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n}$ **3.** $w_n = \dfrac{3n + 2\cos(n)}{n+1}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 5\right) = -5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3-n) = -\infty$.
Ainsi, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n} \\ &= \frac{4^n\left(\dfrac{3^n}{4^n} - 1\right)}{4^n\left(1 - \dfrac{2^n}{4^n}\right)} \\ &= \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1}{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$
Par somme et quotient de limites, on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \\ \iff & -2 \leqslant 2\cos(n) \leqslant 2 \\ \iff & 3n - 2 \leqslant 3n + 2\cos(n) \leqslant 3n+2 \\ \iff & \frac{3n-2}{n+1} \leqslant w_n \leqslant \frac{3n+2}{n+1} \qquad \text{car } n+1 > 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{3n-2}{n+1} = \frac{n\left(3 - \dfrac{2}{n}\right)}{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{3 - \dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}}$$

Par somme et quotient de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-2}{n+1} = 3$.

De la même façon, on peut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$.
D'après le théorème des gendarmes, on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.

La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$, elle est donc dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$, on a :

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 4x$, $u'(x) = 4$, $v(x) = 1+3x$, $v'(x) = 3$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2} \\ &= \frac{4}{(1+3x)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$, $4 > 0$ et $(1+3x)^2 \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.

En conclusion, la fonction f est croissante sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n)\ :\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

- **Initialisation :**

  Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{4 \times \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$.

  Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.

  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$.

  On a :

  $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$ d'après l'hypothèse de récurrence

  $\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(2)$ car la fonction f est croissante sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$

  $\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{8}{7} \leqslant 2$ car $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et $f(2) = \frac{8}{7}$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

  Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $f(\ell) = \ell$.
Déterminer la valeur de ℓ.

$$\begin{aligned}
f(\ell) = \ell \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \\
& \Longleftrightarrow \quad 4\ell = \ell(1+3\ell) \\
& \Longleftrightarrow \quad 3\ell^2 - 3\ell = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 3\ell(\ell-1) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 3\ell = 0 \text{ ou } \ell - 1 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1
\end{aligned}$$

D'après la question **2.(a)**, on a $\ell \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\ell = 1$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\
&= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}} \\
&= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{\frac{1+3u_n-4u_n}{1+3u_n}} \\
&= \frac{4u_n}{1+3u_n} \times \frac{1+3u_n}{1-u_n} \\
&= 4 \times \frac{u_n}{1-u_n} \\
&= 4v_n
\end{aligned}$$

De plus, $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.
On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0 = 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_n &= v_0 \times q^n \\
v_n &= 4^n
\end{aligned}$$

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
& \quad v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n(1-u_n) = u_n \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n - v_n u_n = u_n \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n = v_n u_n + u_n \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n = u_n(v_n+1) \\
\Longleftrightarrow & \quad u_n = \frac{v_n}{v_n+1}
\end{aligned}$$

(c) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{v_n}{v_n+1} \\ &= \frac{4^n}{4^n+1} \\ &= \frac{4^n \times 1}{4^n \times \left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1^n}{4^n}} \\ &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} \\ &= \frac{1}{1+0,25^n} \end{aligned}$$

Comme $-1 < 0,25 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$.

Par somme et quotient de limites, on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.
$u_1 = \dfrac{2 \times u_0 + 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \dfrac{5}{4}$

2. On définit la suite (a_n), pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

(a) Calculer a_0 et a_1.
$a_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2}{2 - 1} = 2$
$a_1 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{4}{1} = 5$

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
Pour tout entier naturel n, on a d'une part

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{u_n - 1}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

D'autre part,

$$3a_n - 1 = 3 \times \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

En conclusion, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P(n) \ : \ a_n \geqslant 3n - 1$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $a_1 = 5$ et $3 \times 1 - 1 = 2$ donc $a_1 \geqslant 3 \times 1 - 1$.
  Par conséquent, $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $a_k \geqslant 3k - 1$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $a_{k+1} \geqslant 3(k+1) - 1 = 3k + 2$.
  On a :

$$\begin{array}{lll} & a_k \geqslant 3k - 1 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow & 3a_k \geqslant 3(3k - 1) & \\ \Rightarrow & 3a_k - 1 \geqslant 9k - 3 - 1 & \\ \Rightarrow & a_{k+1} \geqslant 9k - 4 & \text{d'après la question précédente} \end{array}$$

  Or, on a :

$$9k - 4 \geqslant 3k + 2 \iff 6k \geqslant 6 \iff k \geqslant 1$$

  Ainsi, comme $k \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$a_{k+1} \geqslant 9k - 4 \geqslant 3k - 2$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 3n - 1$.

(d) En déduire la limite de la suite (a_n).
Par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n - 1) = +\infty$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 3n - 1$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} & a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} \\ \iff \quad & a_n(u_n - 1) = u_n \\ \iff \quad & a_n u_n - a_n = u_n \\ \iff \quad & a_n u_n - u_n = a_n \\ \iff \quad & u_n(a_n - 1) = a_n \\ \iff \quad & u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} \end{aligned}$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{a_n \times 1}{a_n \times \left(1 - \dfrac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}$$

Par quotient de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{a_n}\right) = 1$.
Finalement, par quotient de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return(n,u)
```

(a) Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur p choisie.

(b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.
On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que :

$$u_5 \approx 1,0027 \text{ donc } u_5 - 1 > 0,001$$
$$u_6 \approx 1,0009 \text{ donc } u_6 - 1 \leqslant 0,001$$

La valeur de n pour $p = 0,001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour u est une valeur approchée de u_6).
On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6,1,000914913083257)`.