Correction Devoir Surveille N°3 (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (4 points)

Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut toujours additionner deux matrices.
   FAUX
   Pour additionner deux matrices, il est nécessaire qu'elles aient la même taille.

2. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $A \times B = B \times A$.
   FAUX
   Le produit matriciel n'est pas commutatif.
   Par exemple, si on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :
   $$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   On constate alors que $A \times B \neq B \times A$.

3. Pour tout réel a, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible.
   VRAI
   Pour tout réel a, $\det(M) = a \times a - 1 \times (-1) = a^2 + 1 \neq 0$.
   Par conséquent, la matrice M est inversible.

4. Pour tout matrice A carrée d'ordre 2, si $A^2 = I_2$ alors $A = I_2$ ou $A = -I_2$.
   FAUX
   Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = I_2$ mais $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$.

Exercice 2 (5 points)

1. En utilisant des matrices, résoudre le système
   $$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases}$$
   Ce système peut s'écrire sous la forme $AX = B$ avec :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
   On a $\det(A) = -1 \neq 0$ donc la matrice A est inversible et on a alors :
   $$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Ce système admet une unique solution qui est le triplet $\boxed{(2; -3; 1)}$.

2. Déterminer la fonction f polynôme de degré 2 dont la courbe représentative dans un repère passe par les points $A(1;0)$ et $B(2;3)$ et admet une tangente au point B de coefficient directeur égal à 5.
Soit f la fonction recherchée. Il existe des réels a, b et c tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
La courbe de f passe par $A(1;0)$ donc $f(1) = 0$, c'est-à-dire $a + b + c = 0$.
La courbe de f passe par $A(2;3)$ donc $f(2) = 3$, c'est-à-dire $4a + 2b + c = 3$.
La courbe de f admet en B une tangente de coefficient directeur égal à 5 donc $f'(2) = 5$, c'est-à-dire $2a \times 2 + b = 5$.
Ainsi, les coefficients a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases}$$

D'après la question **1.**, on a donc $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
En conclusion, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = 2x^2 - 3x + 1}$.

Exercice 3 (11 points)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - b_n \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0.

Comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, on a $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

2. Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 5a_n - 4b_n \\ 2a_n - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = AX_n$$

en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Sans calculatrice, justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
Comme $\det(P) = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1 \neq 0$, la matrice P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) A l'aide de la calculatrice, calculer PDP^{-1}.
A l'aide de la calculatrice, on trouve que $\boxed{PDP^{-1} = A}$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a d'une part $A^0 = I_2$.
D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.
On a bien égalité donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
Autrement dit, on suppose que $A^k = PD^kP^{-1}$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

On a :

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \times A \\
&= PD^kP^{-1} \times PDP^{-1} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence et la question } \mathbf{3.(a)} \\
&= PD^k\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\
&= PD^kI_2DP^{-1} \\
&= PD^kDP^{-1} \\
&= PD^{k+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**
Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
Comme D est une matrice diagonale, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 3^n \\ 1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1+2\times 3^n & 2-2\times 3^n \\ -1+3^n & 2-3^n \end{pmatrix}}$$

4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
Déduire de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.
Finalement, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
X_n &= \begin{pmatrix} -1+2\times 3^n & 2-2\times 3^n \\ -1+3^n & 2-3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2\times 3^n+4-4\times 3^n \\ -1+3^n+4-2\times 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-2\times 3^n \\ 3-3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = 3-2\times 3^n \text{ et } b_n = 3-3^n}$.

5. Bonus : On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Un examen attentif des opérations dans le calcul de B^2 montre qu'on obtient une matrice dont le carré en haut à gauche correspond à A^2, les autres termes restent des 0 et un 1.
On peut généraliser par récurrence et obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & O_{2,1} \\ \hline O_{1,2} & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1+2\times 3^n & 2-2\times 3^n & 0 \\ -1+3^n & 2-3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$