Devoir Surveille N°3 (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (4 points)

Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut toujours additionner deux matrices.
2. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $A \times B = B \times A$.
3. Pour tout réel a, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible.
4. Pour tout matrice A carrée d'ordre 2, si $A^2 = I_2$ alors $A = I_2$ ou $A = -I_2$.

Exercice 2 (5 points)

1. En utilisant des matrices, résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction f polynôme de degré 2 dont la courbe représentative dans un repère passe par les points $A(1;0)$ et $B(2;3)$ et admet une tangente au point B de coefficient directeur égal à 5.

Exercice 3 (11 points)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - b_n \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0.
2. Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   - **(a)** Sans calculatrice, justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   - **(b)** A l'aide de la calculatrice, calculer PDP^{-1}.
   - **(c)** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - **(d)** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   Déduire de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.
5. **Bonus :** On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.