

DEVOIR SURVEILLE N°3 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (4 points)

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 5 \right) (3 - n)$

2. $v_n = \frac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n}$

3. $w_n = \frac{3n + 2 \cos(n)}{n + 1}$

Exercice 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1 + 3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3} ; +\infty \right[$.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $f(\ell) = \ell$.
Déterminer la valeur de ℓ .
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.
- (c) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1 .
2. On définit la suite (a_n) , pour tout entier naturel n , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- (a) Calculer a_0 et a_1 .
- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n - 1$$

- (d) En déduire la limite de la suite (a_n) .

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .

- (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.
- (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):  
    u=2  
    n=0  
    while u-1>p:  
        u=(2*u+1)/(u+2)  
        n=n+1  
    return(n,u)
```

- (a) Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction $\text{algo}(p)$ dans le contexte de l'exercice.
- (b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Bonus (1 point)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq v_n \leq 1$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et préciser leur limite.