Devoir Surveille N°3 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (3 points)

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 5\right)(n^2+3)$ **2.** $v_n = 3^n - 2^n$ **3.** $w_n = \dfrac{2n^3-5}{3n^3-5n+1}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 5\right) = -5$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+3) = +\infty$.
Finalement, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

2. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$ donc, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

3. On a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{n^3\left(\dfrac{2n^3}{n^3} - \dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{3n^3}{n^3} - \dfrac{5n}{n^3} + \dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{2 - \dfrac{5}{n^3}}{3 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.
Par produit et sommes de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{5}{n^3}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = 3$.

Finalement, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{2}{3}}$.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
FAUX
Pour le prouver, il faut exhiber un contre-exemple.
On peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.
Cette suite est décroissante et minorée par 0 mais elle converge vers 1.

Se limiter à dire que « Non, ça ne converge pas forcément vers 0 » n'est pas une démonstration !

2. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1000 euros par jour pendant 15 jours.

- Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2ème jour, 4 euros le 3ème jour, et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 2 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

FAUX

Le montant total du prix A est de de $1500 \times 15 = 15000$€.

Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jour) et de raison 2 (car le montant double chaque jour).

Le montant total du prix B est donc égal à :

$$(\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = 2^{15} - 1 = 32767$$

Comme $32767 > 15000$, le prix B est nettement plus avantageux.

En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi patiemment calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue le quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16384$€, donc rien que la somme reçue le quinzième jour est strictement supérieure aux quinze jours cumulés pour le prix A.

3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

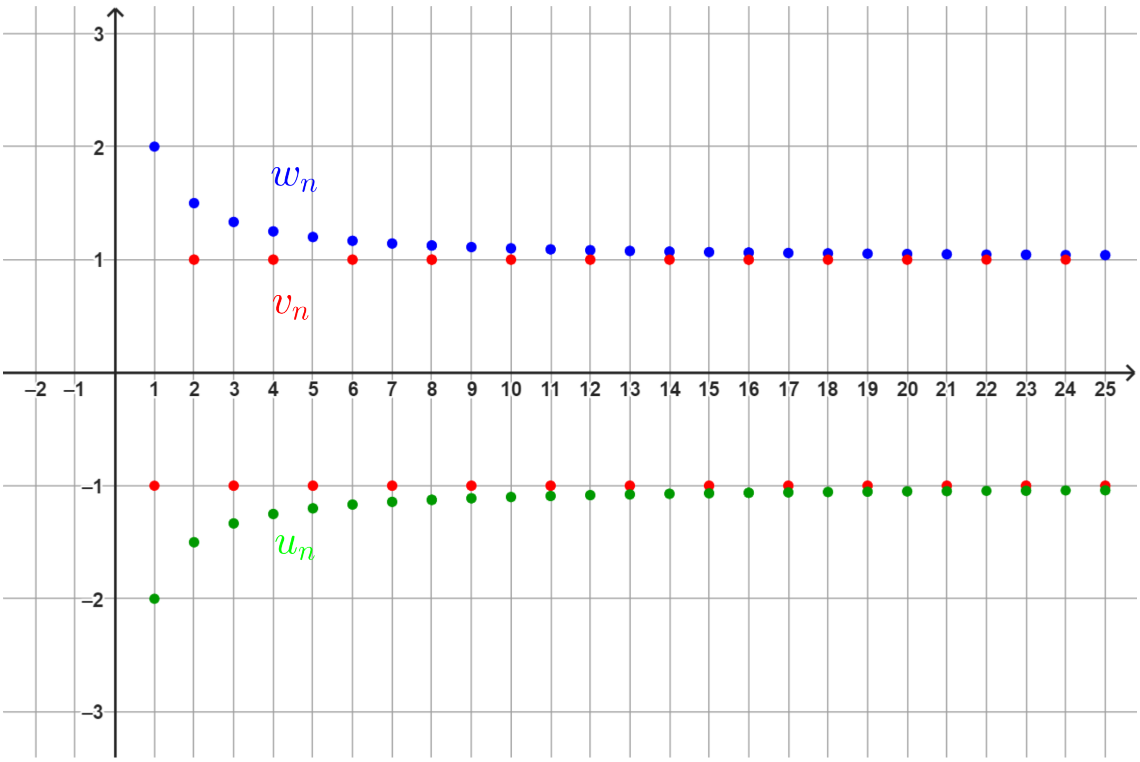
FAUX

La suite (v_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien de sa monotonie et de sa convergence.

Considérons les suites

$$u_n = -1 - \frac{1}{n} \qquad v_n = (-1)^n \qquad w_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Les hypothèses sont respectées mais la suite (v_n) ne converge pas.



On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

VRAI

Si (u_n) est croissante et (w_n) est décroissante, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0$$

En particulier, on a bien $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Exercice 3 (4 points)

Soient (u_n) est (v_n) deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} \\ &= \frac{3u_n + 9v_n}{12} - \frac{8u_n + 4v_n}{12} \\ &= \frac{-5u_n + 5v_n}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)}$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n) \\ &= \frac{5}{12}w_n \end{aligned}$$

De plus, $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.
On en déduit donc que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = 8$.
Par conséquent, on a, pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 \times q^n$$

$$\boxed{w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n}$$

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Remarquons tout d'abord que, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \geqslant 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{3} = \frac{w_n}{3} \geqslant 0$$

En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.
De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} \leqslant 0$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante}}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \geqslant 0 \iff v_n - u_n \geqslant 0 \iff v_n \geqslant u_n$$

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.
A l'aide de ces deux inégalités, on en déduit que $\boxed{v_n \geqslant u_n \geqslant 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme la suite (v_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.
A l'aide de ces deux inégalités, on en déduit que $\boxed{u_n \leqslant v_n \leqslant 10}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 10.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes}}$.

Exercice 4 (9 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
$u_1 = \dfrac{2+3u_0}{4+u_0} = \dfrac{2+3\times 3}{4+2} = \boxed{\dfrac{11}{7}}$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$.
La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0;4]$, elle est donc dérivable sur $[0;4]$.
Pour tout $x \in [0;4]$,

$$f'(x) = \frac{3\times(4+x)-(2+3x)\times 1}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$$

Pour tout $x \in [0;4]$, $10 \geqslant 0$ et $(4+x)^2 \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.
En conclusion, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } [0;4]}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$$

- Initialisation :
$u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7} \approx 1,57$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

- Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$.
On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$.
On a :

$$\begin{array}{lll} & 1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow & f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(3) & \text{car la fonction } f \text{ est croissante sur } [0;4]. \\ \Rightarrow & 1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{11}{7} \leqslant 3 & \text{car } f(1) = 1 \text{ et } f(3) = \dfrac{11}{7} \end{array}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5}$.

4. **(a)** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \in [1;3]$.

(b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet qu'elle vérifie la relation :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

Déterminer la valeur de la limite ℓ.

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell(4+\ell) = 2+3\ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2+\ell-2=0$$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1 \times (-2) = 9$
$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes :

$$\ell_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2$$

Comme $\ell \in [1;3]$, on en déduit que la limite de la suite (u_n) est $\boxed{\ell = 1}$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
On peut conjecturer que $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante et qu'elle converge vers } 1}$.

2. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n).$$

Pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{(4+v_n)-(2+3v_n)}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$$

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Initialisation :

$1 - v_0 = 1 - 0,1 = 0,9$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leqslant 1 - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Tout d'abord, remarquons que, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1 - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad & \Rightarrow \quad v_k \geqslant 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant 0 \\ & \Rightarrow \quad 4 + v_k \geqslant 4 \\ & \Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1}{4+v_k} \leqslant \frac{1}{4} \\ & \Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{2}{4+v_k} \leqslant \frac{1}{2} \quad \textbf{(*)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant 1 - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow \quad & 0 \times \frac{2}{4+v_k} \leqslant (1 - v_k) \times \frac{2}{4+v_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{2}{4+v_k} && \text{car } \frac{2}{4+v_k} \geqslant 0 \text{ d'après } \textbf{(*)} \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{2}{4+v_k} && \text{d'après la question } \textbf{1.(a)} \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2} && \text{d'après } \textbf{(*)} \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :

Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - v_n) = 0$.

En conclusion, la suite (v_n) est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1}$.

Bonus (1 point)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.