Devoir Surveillé N°3 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (3 points)

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 5\right)(n^2+3)$ **2.** $v_n = 3^n - 2^n$ **3.** $w_n = \dfrac{2n^3-5}{3n^3-5n+1}$

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1000 euros par jour pendant 15 jours.
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2ème jour, 4 euros le 3ème jour, et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 2 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
   De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.
   Affirmation 3 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

   On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Exercice 3 (4 points)

Soient (u_n) est (v_n) deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$$

1. **(a)** Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.
2. **(a)** Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 4 (9 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **(a)** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet qu'elle vérifie la relation :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

1. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)\left(1 - v_n\right).$$

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Bonus (1 point)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.