$\boxed{\text{DEVOIR SURVEILLE N°2 (1H15)}}$

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (5 points)

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $7n-5$ divise 23.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
$7n-5$ divise 23 si, et seulement si, $7n-5 \in \{-23; -1; 1; 23\}$, c'est-à-dire $n \in \left\{-\frac{18}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}; 4\right\}$.
Comme n est un entier, on en déduit que $7n-5$ divise 23 si, et seulement si, $n = 4$.
Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\{4\}}$.

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 23 divise $n+2$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
23 divise $n+2$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n+2 = 23k$, c'est-à-dire $n = 23k-2$.
Ainsi, l'ensemble cherché est $\boxed{\{23k-2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}}$.

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $7n-5$.

- **(Analyse)**
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n+2 \mid 7n-6$. Remarquons que

$$(n+2) \mid (n+2) \qquad \text{et} \qquad (n+2) \mid (7n-5)$$

Ainsi, $(n+2)$ divise n'importe quelle combinaison linéaire de $(n+2)$ et de $(7n+5)$.
En particulier, on a :

$$n+2 \mid 7 \times (n+2) - 1 \times (7n-5) = 19$$

Il ne reste plus qu'à lister les diviseurs de 19 car $n+2$ en fait forcément parti.
Les diviseurs de 19 sont $D_{19} = \{-19; -1; 1; 19\}$, nous devons donc résoudre :

$n+2 = -19 \iff n = -21$
$n+2 = -1 \iff n = -3$
$n+2 = 1 \iff n = -1$
$n+2 = 19 \iff n = 17$

Il y a donc quatre possibilités : -21, -3, -1 et 17.

- **(Synthèse)**
Regardons parmi nos condidats lesquels sont bien solutions.
Si $n = -21$, $7n-5 = -152$ et $n+2 = -19$, on a bien $-19 \mid -152$..
Si $n = -3$, $7n-5 = -26$ et $n+2 = -1$, on a bien $-1 \mid -26$.
Si $n = -1$, $7n-5 = -12$ et $n+2 = 1$, on a bien $1 \mid -12$.
Si $n = 17$, $7n-5 = 114$ et $n+2 = 19$, on a bien $19 \mid 114$.

En conclusion, $\boxed{\text{les solutions sont les entiers } -21,\ -3,\ -1 \text{ et } 17}$.

Exercice 2 (4 points)

Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que $4a^2 - b^2 = 15$.

Analyse :
Soit $(a; b)$ un couple d'entiers naturels solution de cette équation.

$$4a^2 - b^2 = 15 \iff (2a-b)(2a+b) = 15$$

On a $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, donc $2a+b \geqslant 2a-b$.
De plus, comme $2a+b \geqslant 0$, on a aussi $2a-b \geqslant 0$ d'après la règle des signes.
Nous constatons que $(2a+b)$ et $(2a-b)$ divisent le membre de gauche donc ce sont aussi des diviseurs du membre de

droite, c'est-à-dire 15. Enfin, les diviseurs positifs de 15 sont $\{1;3;5;15\}$.
Nous devons donc résoudre les 2 systèmes d'équations envisageables :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2a+b=15 \\ 2a-b=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2a+b=5 \\ 2a-b=3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 4a=16 \\ 2a-b=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 4a=8 \\ 2a-b=3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Synthèse :
Il ne reste plus qu'à regarder si les couples obtenus sont bien solutions de cette équation.
$4\times4^2-7^2=64-49=15$ donc le couple $(4;5)$ est bien solution de cette équation.
$4\times2^2-1^2=16-1=15$ donc le couple $(2;1)$ est bien solution de cette équation.

Conclusion :
Les solutions de cette équation sont donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{N}^2}=\{(4;7),(2;1)\}}$$

Exercice 3 (4 points)

On considère l'équation (E) : $x^2-3y^2=2023$ d'inconnue $(x;y)\in\mathbb{N}^2$.

1. Déterminer le reste de 2023 modulo 8.
   Comme $2023=252\times8+7$ avec $0\leqslant7<8$, on en déduit que $\boxed{\text{le reste de } 2023 \text{ modulo } 8 \text{ est } 7}$.

2. **(a)** Soit $n\in\mathbb{N}$. À l'aide d'un tableau de congruences, déterminer les restes possibles pour n^2 modulo 8.
   On construit un tableau de congruences modulo 8 :

$n\equiv\ldots\,[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2\equiv\ldots\,[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

   Ainsi, $\boxed{\text{les restes possibles pour } n^2 \text{ modulo } 8 \text{ sont } 0,\ 1 \text{ et } 4}$.

   (b) Soient x et y deux entiers naturels. Recopier et compléter le tableau à double entrée ci-dessous afin de déterminer les restes possibles pour x^2-3y^2 modulo 8.

y^2 \ x^2	0	1	4
0	0	1	4
1	5	6	1
4	4	5	0

   Ainsi, $\boxed{\text{les restes possibles pour } x^2-3y^2 \text{ modulo } 8 \text{ sont } 0,\ 1,\ 4,\ 5 \text{ et } 6}$.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (E).
   Pour tous entiers naturels x et y, $x^2-3y^2\not\equiv2023\,[8]$ et ainsi $x^2-3y^2\neq2023$.
   En conclusion, $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'admet pas de solutions entières}}$.

Exercice 4 (4 points)

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2023^{2023} par 5.

- Déterminons la plus petite puissance possible $n > 0$ telle que $2023^n \equiv 1\,[7]$ afin de simplifier nos calculs.

$$\begin{array}{lll} 2023^1 = 5 \times 404 + 3 & \text{donc} & 2023^1 \equiv 3\,[5] \\ 2023^2 \equiv 2023 \times 2023 \equiv 3 \times 3 \equiv 4\,[5] & \text{donc} & 2023^2 \equiv 4\,[5] \\ 2023^3 \equiv 2023 \times 2023^2 \equiv 3 \times 4 \equiv 2\,[5] & \text{donc} & 2023^3 \equiv 2\,[5] \\ 2023^4 \equiv 2023 \times 2023^3 \equiv 3 \times 2 \equiv 1\,[5] & \text{donc} & 2023^4 \equiv 1\,[5] \end{array}$$

La puissance recherchée vaut donc $n = 4$.

- Il reste maintenant à effectuer la division euclidienne de 2023 par 4 :

$$2023 = 4 \times 505 + 3$$

On obtient alors

$$2023^{2023} \equiv 2023^{4\times505+3} \equiv \left(2023^4\right)^{505} \times 2023^3 \equiv 1^{505} \times 2 \equiv 2\,[5]$$

Le reste de la division euclidienne de 2023^{2023} par 5 est $\boxed{2}$.

Exercice 5 (3 points)

La somme de deux entiers naturels a et b non nuls est égale à 434.
Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est égal à 4 et le reste r est un chiffre pair.
Déterminer, en justifiant votre démarche, les valeurs de a, b et r.

D'après les données de l'énoncé, on a $a + b = 434$, $a = 4b + r$ et $r \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.
A partir des deux premières équations on en déduit que :

$$a = 434 - b \iff 434 - b = 4b + r \iff 5b = 434 - r$$

Ainsi, $434 - r$ est un multiple de 5. Testons alors avec les différentes valeurs possibles de r.

- Si $r = 0$, $434 - 0 = 434$ n'est pas un multiple de 5.
- Si $r = 2$, $434 - 2 = 432$ n'est pas un multiple de 5.
- Si $r = 4$, $434 - 4 = 430$ est bien un multiple de 5.
- Si $r = 6$, $434 - 6 = 428$ n'est pas un multiple de 5.
- Si $r = 8$, $434 - 8 = 426$ n'est pas un multiple de 5.

On en déduit donc que $\boxed{r = 4}$, puis que $5b = 434 - 4 = 430$ donc $\boxed{b = 86}$.
Finalement, $a = 434 - b = 434 - 86$ donc $\boxed{a = 348}$.

Exercice 6 (2 points)

Le 25 novembre 2023 est un samedi et on souhaite une bonne fête à toutes les Catherine !
Quel jour de la semaine sera le 25 novembre 2036 ?

Le 25 novembre 2023 est un samedi. Il y a 13 ans entre 2023 et 2036 et 4 années bissextiles.
Comme $365 = 7 \times 52 + 1$, chaque année le jour de la semaine est décalé d'un jour, sauf les années bissextiles où il est décalé de 2 jours. Entre le samedi 25 novembre 2023 et le 25 novembre 2036, il y a donc $13 + 4 = 17$ jours de décalage, soit 2 semaines et 3 jours.
En conclusion, $\boxed{\text{le 25 novembre 2036 sera un mardi}}$.