

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°2 (2H)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Quelques dérivées (1,5 point)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (2x^3 + 3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$. 2. $g(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$. 3. $h(x) = \sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = 4(6x^2 + 3)(2x^3 + 3x + 1)^3$

2. $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$

3. $f'(x) = \frac{4x^3 - 6xe^{-x^2}}{2\sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}}}$

Exercice 2 - Raisonnement par récurrence (2,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul :

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P(n) : u_n \leq 3$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leq 3$ donc $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k \leq 3$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq 3$.

On a :

$$\begin{aligned} & u_k \leq 3 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow & \frac{k}{2(k+1)} \times u_k \leq \frac{k}{2(k+1)} \times 3 && \text{car } \frac{k}{2(k+1)} \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{k}{2(k+1)} \times u_k + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} \leq \frac{3k}{2(k+1)} + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} \\ \Rightarrow & u_{k+1} \leq \frac{3k + 3k + 6}{2(k+1)} \\ \Rightarrow & u_{k+1} \leq \frac{6(k+1)}{2(k+1)} \\ \Rightarrow & u_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 3$.

La suite (u_n) est donc bien majorée par 3.

Exercice 3 - Étude d'une suite (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 65 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 18 \end{cases}$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

$$u_0 = 65$$

$$u_1 = 0,8 \times u_0 + 18 = 70$$

$$u_2 = 0,8 \times u_1 + 18 = 74$$

$$u_1 - u_0 = 5 \text{ et } u_2 - u_1 = 4.$$

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \text{ donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}.$$

$$\frac{u_1}{u_0} \approx 1,08 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} \approx 1,06.$$

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \text{ donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 90$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 90 \\ &= 0,8u_n + 18 - 90 \\ &= 0,8u_n - 72 \\ &= 0,8(u_n - 90) \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

De plus, $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$.

En conclusion, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,8 \text{ et de premier terme } v_0 = -25}$.

(b) En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de n .

D'après ce qui précède, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$\boxed{v_n = -25 \times 0,8^n}$$

De plus, $v_n = u_n - 90 \iff u_n = v_n + 90$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = -25 \times 0,8^n + 90}$$

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Méthode 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -25 \times 0,8^{n+1} + 90 - (-25 \times 0,8^n + 90) \\ &= -25 \times 0,8^{n+1} + 25 \times 0,8^n \\ &= 25 \times 0,8^n (-0,8 + 1) \\ &= 25 \times 0,8^n \times 0,2 > 0 \end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

Méthode 2 :

Après avoir calculé les premiers termes de la suite (u_n) , on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante. Démontrons ce résultat par récurrence.

■ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) : u_{n+1} > u_n$$

▪ **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 65$ et $u_1 = 70$.

$u_1 > u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

▪ **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_{k+1} > u_k$.

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} > u_{k+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} & u_{k+1} > u_k && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \implies & 0,8 \times u_{k+1} > 0,8 \times u_k \\ \implies & 0,8 \times u_{k+1} + 18 > 0,8 \times u_k + 18 \\ \implies & u_{k+2} > u_{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

▪ **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

On en déduit donc que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. Écrire un programme Python permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 89$.

```
def seuil(s):
    u = 65
    n = 0
    while u <= s :
        u = 0.8 * u + 18
        n = n + 1
    return n
```

```
def seuil(s):
    u = 65
    n = 0
    while u <= s :
        n = n + 1
        u = -25 * 0.8 * n + 90
    return n
```

On tape ensuite dans la console **seuil(89)**.

Exercice 4 - Étude d'une suite (2 points)

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .

Utilisons l'égalité de l'énoncé avec $n = 10$.

$$\begin{aligned} 10 \times w_{10} &= (10+1) \times w_{10-1} + 1 \\ \iff 10 \times w_{10} &= 11 \times w_9 + 1 \\ \iff w_{10} &= \frac{11 \times 19 + 1}{10} \\ \iff w_{10} &= 21 \end{aligned}$$

2. Déterminer la nature de la suite (w_n) . Une simple conjecture est un bon début mais ne sera pas suffisant.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte dans l'évaluation.



Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Très souvent, la méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique est de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \dots = \text{une constante}$$

Malheureusement, nous sommes dans un des rares cas où ça ne fonctionne pas, mais votre tentative serait valorisée par la barème, même si elle n'aboutit pas !

Néanmoins, à l'aide du tableau de valeurs, on peut conjecturer que la suite (w_n) est arithmétique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Ainsi, on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 + n \times r$$

$$w_n = 2n + 1$$

Démontrons cette conjecture par récurrence. (Cette prise d'initiative était déjà une première grosse difficulté)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : w_n = 2n + 1$$

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $w_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $w_k = 2k + 1$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $w_{k+1} = 2(k+1) + 1 = 2k + 3$.

On a :

$$(k+1)w_{k+1} = (k+2)w_k + 1 \quad \text{d'après l'énoncé}$$

$$\Rightarrow (k+1)w_{k+1} = (k+2)(2k+1) + 1 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$\Rightarrow (k+1)w_{k+1} = 2k^2 + k + 4k + 2 + 1$$

$$\Rightarrow (k+1)w_{k+1} = 2k^2 + 5k + 3$$

De plus, on constate que $(2k+3)(k+1) = 2k^2 + 2k + 3k + 3 = 2k^2 + 5k + 3$ donc :

$$(k+1)w_{k+1} = (k+1)(2k+3)$$

$$\Rightarrow w_{k+1} = 2k + 3$$

Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**

Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier naturel n , $w_n = 2n + 1$.

En conclusion, la suite (w_n) est bien arithmétique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Exercice 5 - Un petit tour de toboggan (9 points)

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

- Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.

g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[-3; 4]$ et, pour tout $x \in [-3; 4]$,

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Commençons par résoudre l'équation $g'(x) = 0$.

$$a = 3, b = -6, c = 5 \quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -24$$

$\Delta < 0$ donc l'équation $g'(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

De plus $a = 3 > 0$ donc la fonction g' est strictement positive sur $[-3; 4]$.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[-3; 4]$.

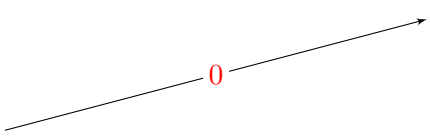
- On admet que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α . Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,18$.

rad GRAPHEUR	
Expressions	Graphique
Résultats exacts ○ Régler l'intervalle	
x	p(x)
-0.183	-0.02159549
-0.182	-0.01540057
-0.181	-0.009212741
-0.18	-0.003032
-0.179	0.003141661
-0.178	0.009308248
-0.177	0.01546777
-0.176	0.02162022

- Déterminer le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.

A l'aide des questions précédentes, on peut en déduire la tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[-3; 4]$:

x	-3	α	4
$g(x)$			
$g(x)$	-	0	+

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$$

f est dérivable sur $[-3; 4]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[-3; 4]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-3; 4]$. Pour tout $x \in [-3; 4]$, on a :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u(x) = e^x \\ v(x) = 1 + x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 2x \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{e^x (x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (x - 1)^2}{(1 + x^2)^2}$$

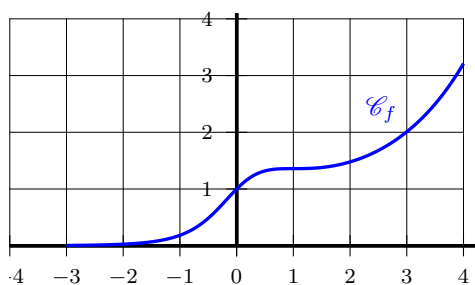
- (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 dont on déterminera l'équation réduite.

$$f'(1) = \frac{e^1(1 - 1)^2}{(1 + 1^2)^2} = 0 \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.}$$

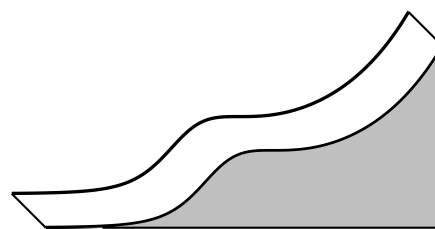
$$\text{De plus, } f(1) = \frac{e^1}{1 + 1^2} = \frac{e}{2}.$$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = \frac{e}{2}$.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$



Vue de profil du toboggan

- (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

D'après le graphique, on peut conjecturer que la fonction f est :

- convexe sur $[-3; 0]$
- concave sur $[0; 1]$
- convexe sur $[1; 4]$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc deux points d'inflexion, aux points d'abscisse $x = 0$ et en $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

- (b) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x - 1)e^x}{(1 + x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

f' est dérivable sur $[-3; 4]$ comme produit et quotient de fonctions dérivables sur $[-3; 4]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-3; 4]$.

Pour tout $x \in [-3; 4]$, on a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

avec

$$\begin{aligned} u(x) &= (x-1)^2 e^x \\ u'(x) &= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = e^x(x-1)(2+(x-1)) = e^x(x-1)(x+1) \\ v(x) &= (1+x^2)^2 \\ v'(x) &= 2 \times 2x \times (1+x^2) = 4x(1+x^2) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)(x+1) \times (1+x^2)^2 - (x-1)^2 e^x \times 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^x(1+x^2)(x-1) [(x+1)(1+x^2) - (x-1)4x]}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^x(x-1) [x+x^3+1+x^2-4x^2+4x]}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{e^x(x-1) [x^3-3x^2+5x+1]}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)p(x)}{(1+x^2)^3}$$

(c) En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Pour déterminer la convexité de la fonction f , nous allons étudier le signe de la fonction f'' .

Tout d'abord, pour tout $x \in [-3; 4]$, $e^x > 0$ et $(1+x^2)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-1)p(x)$.

On peut alors construire le tableau de signes suivant :

x	-3	α	1	4
$p(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$

La fonction f'' s'annule **et change de signe** deux fois sur l'intervalle $[-3; 4]$: en $x = \alpha$ et en $x = 1$.

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion et le toboggan assure donc de bonnes sensations

Bonus

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$.

On pose la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{n+1} - u_n$.

On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer cette somme de deux manières différentes (en fonction de u_n , puis en fonction de n).
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .