Correction Devoir Surveille N°2 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Quelques dérivées (1,5 point)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (-2x^3 + 5x + 9)^5$ sur $\mathbb{R}$. **2.** $g(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$. **3.** $h(x) = \sqrt{x^2 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = 5(-6x^2 + 5)(-2x^3 + 5x + 9)^4$

2. $g'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$

3. $f'(x) = \dfrac{2x - e^{-x}}{2\sqrt{x^2 + e^{-x}}}$

Exercice 2 - Étude d'une fonction (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[-2; 2]$.
La fonction f est dérivable sur $[-2; 2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-2; 2]$.
Pour tout $x \in [-2; 2]$, $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x^2 - 4x + 5$, $v(x) = e^x$; $u'(x) = 2x - 4$, $v'(x) = e^x$
On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x-4)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x \\ &= e^x(x^2 - 2x + 1) \\ &= e^x(x-1)^2 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [-2; 2]$, $e^x > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.
En conclusion, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } [-2; 2]}$.

2. Étudier la convexité de la fonction f sur $[-2; 2]$.
La fonction f' est dérivable sur $[-2; 2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-2; 2]$.
Pour tout $x \in [-2; 2]$, $f'(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$, $v(x) = e^x$; $u'(x) = 2x - 2$, $v'(x) = e^x$
On a donc :

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x-2)e^x + (x^2 - 2x + 1)e^x \\ &= e^x(x^2 - 1) \\ &= e^x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [-2; 2]$, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x+1)(x-1)$.
$x + 1 = 0 \iff x = -1$ $\qquad$ $x - 1 = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$m=1>0$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$m=1>0$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
Convexité de f		convexe	‖	concave	‖	convexe		

3. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=-1$ et en $x=1$.
De plus, $f(-1)=((-1)^2-4\times(-1)+5)e^{-1}=10e^{-1}$ et $f(1)=(1^2-4\times 1+5)e^{1}=2e$.
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion de coordonnées $\boxed{A\left(-1;10e^{-1}\right) \text{ et } B\,(1;2e)}$.

Exercice 3 - Étude d'une fonction rationnelle (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^3+3x-3$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et on pourra donc placer cette valeur dans le tableau.
g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2+3 \\ &= -3(x^2-1) \\ &= -3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

g' est un polynôme du second degré qui s'annule en $x=-1$ et en $x=1$.
De plus, $a=-3<0$ donc g' est négative à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	-5	↗	-1	↘	

Après calcul, $g(-1)=-5$ et $g(1)=-1$.

2. On admet que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On note α cette valeur. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $-2,11<\alpha<-2,10$.

3. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
À l'aide du tableau de variation, on peut dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[$ par $f(x) = \dfrac{3-2x^3}{x^2-1}$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On admettra que f est dérivable sur son domaine de définition.

1. Montrer que pour tout réel $x < -1$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$$

Pour tout réel $x < -1$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{-6x^2(x^2-1) - 2x(3-2x^3)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-6x^4 + 6x^2 - 6x + 4x^4}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-2x^4 + 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2x(-x^3 + 3x - 3)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;-1[$.
On ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$.
Pour tout réel $x < -1$, $(x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2xg(x)$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		-1
$2x$		$-$		$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

3. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -2x + 5$?
Si oui, préciser leurs abscisses respectives.
Une telle tangente sera parallèle à Δ si, et seulement si, son coefficient directeur est égal à -2.
Recherche une telle tangente revient donc à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
f'(x) = -2 &\iff \frac{-2x^4 + 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = -2 \\
&\iff -2x^4 + 6x^2 - 6x = -2 \times (x^2-1)^2 \\
&\iff -2x^4 + 6x^2 - 6x = -2x^4 + 4x^2 - 2 \\
&\iff 2x^2 - 6x + 2 = 0
\end{aligned}$$

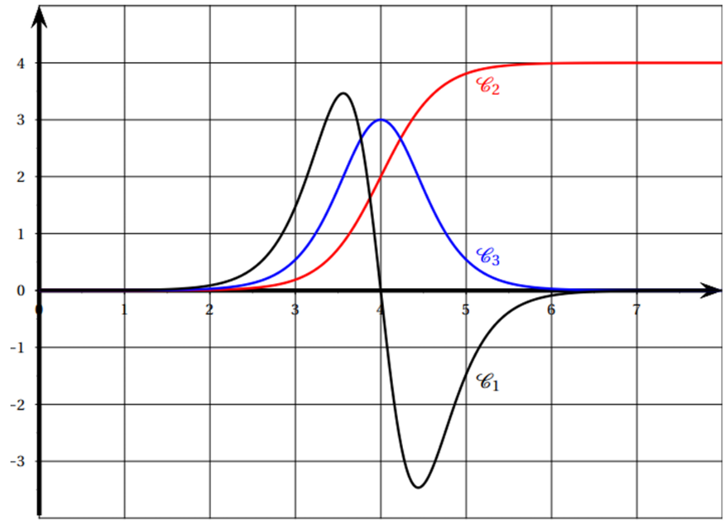
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 20$
$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \notin]-\infty ; -1[\qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \notin]-\infty ; -1[$$

$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ n'admet donc pas de tangente parallèle à } \Delta.}$

Exercice 4 - Qui est-ce ? (1 point)

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



Fonction	f	f'	f''
Courbe	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$	$\mathscr{C}_1$

Recopier le tableau sur votre copie et le compléter sans aucune justification.
L'exercice sera considéré comme réussi si, et seulement si, chaque fonction est correctement associée à sa courbe.

Exercice 5 - Étude d'une suite (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$$

1. (a) Compléter le tableau de valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-3} près :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	$0,5$	$0,8$	$0,909$	$0,957$	$0,979$	$0,989$	$0,995$

(b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
On peut conjecturer que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

2. (a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) \ : \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.

On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.
On a :

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant u_k \leqslant 1 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \Longrightarrow & 0 \geqslant -u_k \geqslant -1 & \\ \Longrightarrow & 3+0 \geqslant 3-u_k \geqslant 3-1 & \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{3-u_k} \leqslant \dfrac{1}{2} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[\\ \Longrightarrow & 2 \times \dfrac{1}{3} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{3-u_k} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2} & \\ \Longrightarrow & 0 \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 & \end{array}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3-u_n} - u_n \\ &= \frac{2}{3-u_n} - u_n \times \frac{3-u_n}{3-u_n} \\ &= \frac{2-3u_n+u_n^2}{3-u_n} \end{aligned}$$

On constate de plus que $(u_n-1)(u_n-2) = u_n^2 - 3u_n + 2$ donc, finalement, on a bien :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n}}$$

(c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
On a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
Par conséquent, $u_n - 1 \leqslant 0$, $u_n - 2 \leqslant 0$ et $3 - u_n \geqslant 0$.
On en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n} \geqslant 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Exercice 6 - Suite géométrique (1,5 point)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n - 2n + 6$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n + 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n - 2n + 6\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

De plus, $w_0 = u_0 - 2 \times 0 + 6 = 6$.
Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est une suite géométrique}}$ de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 6$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

Pour tout entier naturel,

$$\begin{aligned} w_n &= w_0 \times q^n \\ w_n &= 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

De plus, $u_n = w_n + 2n - 6$ donc $\boxed{u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **(Bonus)** Pour tout entier naturel n, exprimer la somme S_n en fonction de n, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Après calculs, vous êtes censés trouver $S_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2 - 5n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quelques rappels utiles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2k - 6\right) \\ &= 6\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-6) \\ &= 6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times (-6) \\ &= 12 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n^2 + n - 6n - 6 \\ &= 12 - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n - 6 \\ &= -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 - 5n + 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2 - 5n + 6}$$