Devoir Surveille N°2 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Quelques dérivées (1,5 point)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (-2x^3 + 5x + 9)^5$ sur $\mathbb{R}$. **2.** $g(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$. **3.** $h(x) = \sqrt{x^2 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Étude d'une fonction (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[-2; 2]$.

2. Étudier la convexité de la fonction f sur $[-2; 2]$.

3. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3 - Étude d'une fonction rationnelle (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 3x - 3$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et on pourra donc placer cette valeur dans le tableau.

2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On note α cette valeur. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

3. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; -1[$ par $f(x) = \dfrac{3 - 2x^3}{x^2 - 1}$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On admettra que f est dérivable sur son domaine de définition.

1. Montrer que pour tout réel $x < -1$ on a :

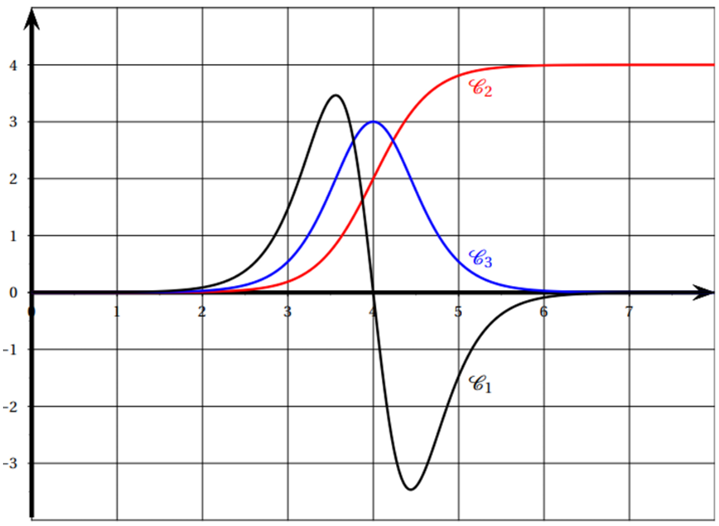
$$f'(x) = \frac{2x\, g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty; -1[$.
On ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$.

3. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -2x + 5$?
Si oui, préciser leurs abscisses respectives.

Exercice 4 - Qui est-ce ? (1 point)

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



Fonction	f	f'	f''
Courbe			

Recopier le tableau sur votre copie et le compléter sans aucune justification.
L'exercice sera considéré comme réussi si, et seulement si, chaque fonction est correctement associée à sa courbe.

Exercice 5 - Étude d'une suite (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$$

1. **(a)** Compléter le tableau de valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-3} près :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	$0,5$						

(b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. **(a)** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(b) Prouver que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3 - u_n}$.

(c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 6 - Suite géométrique (1,5 point)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n - 2n + 6$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

3. **(Bonus)** Pour tout entier naturel n, exprimer la somme S_n en fonction de n, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Après calculs, vous êtes censés trouver $S_n = -6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n^2 - 5n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.