Devoir Surveille N°2 (2h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Quelques dérivées (1,5 point)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (2x^3 + 3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$. **2.** $g(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$. **3.** $h(x) = \sqrt{x^4 + 3e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Raisonnement par récurrence (2,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul :

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

Exercice 3 - Étude d'une suite (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 65 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 18 \end{cases}$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 90$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

4. Écrire un programme Python permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 89$.

Exercice 4 - Étude d'une suite (2 points)

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

2. Déterminer la nature de la suite (w_n). Une simple conjecture est un bon début mais ne sera pas suffisant.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 5 - Un petit tour de toboggan (9 points)

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.
2. On admet que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.
3. Déterminer le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

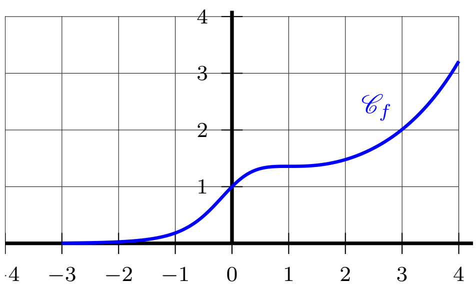
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **(a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$:

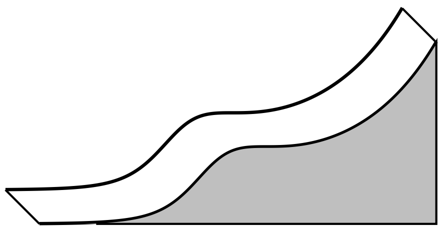
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$$

   (b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 dont on déterminera l'équation réduite.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   (b) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.

   (c) En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Bonus

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$.
On pose la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer cette somme de deux manières différentes (en fonction de u_n, puis en fonction de n).
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.