Correction Devoir Surveille N°1 (30min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+2} + 3$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) \quad : \quad u_n = 2^{n+2} + 3$$

- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $2^{0+2} + 3 = 4 + 3 = 7 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $u_k = 2^{k+2} + 3$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 2^{(k+1)+2} + 3 = 2^{k+3} + 3$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 3 \\ &= 2(2^{k+2} + 3) - 3 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 2^{k+2} + 2 \times 3 - 3 \\ &= 2^{k+3} + 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**
Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = 2^{n+2} + 3}$$

Exercice 2

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P(n) \quad : \quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

- **Initialisation :**
  Pour $n=1$, le terme de gauche vaut $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$ et le terme de droite vaut $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.
  On a bien égalité donc $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ est vraie.
  Autrement dit, on suppose que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{k\times(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{k\times(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

  On a :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{k\times(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

  Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}}$$