Correction Devoir Surveille N°1 (60min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (3 points)

En détaillant les calculs, mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$A = (2+3i)^2$ $\qquad B = \dfrac{1}{1+i}$ $\qquad C = \dfrac{2+i}{2-4i}$ $\qquad D = \dfrac{1}{2+i} + \dfrac{1}{2-i}$

$$A = (2+3i)^2$$
$$A = 2^2 + 2\times 2\times 3i + (3i)^2$$
$$\boxed{A = -5+12i}$$

$$B = \frac{1}{1+i}$$
$$B = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$$
$$B = \frac{1-i}{1^2 - i^2}$$
$$\boxed{B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$C = \frac{2+i}{2-4i}$$
$$C = \frac{2+i}{2-4i} \times \frac{2+4i}{2+4i}$$
$$C = \frac{4+8i+2i-4}{2^2-(4i)^2}$$
$$\boxed{C = \frac{1}{2}i}$$

$$D = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$$
$$D = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} + \frac{1}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$
$$D = \frac{2-i+2+i}{2^2-i^2}$$
$$\boxed{D = \frac{4}{5}}$$

Exercice 2 (8 points)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.
On donnera à chaque fois le résultat sous forme algébrique.

1. $(1+2i)z = 1-2iz$
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
(1+2i)z = 1-2iz &\iff (1+2i)z + 2iz = 1\\
&\iff (1+4i)z = 1\\
&\iff z = \frac{1}{1+4i}\\
&\iff z = \frac{1}{1+4i} \times \frac{1-4i}{1-4i}\\
&\iff z = \frac{1-4i}{1^2-(4i)^2}\\
&\iff \boxed{z = \frac{1}{17} - \frac{4}{17}i}
\end{aligned}$$

2. $(z+i)(iz+1) = 0$
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
(z+i)(iz+1) = 0 &\iff (z+i) = 0 \quad \text{ou} \quad iz+1 = 0\\
&\iff z = -i \quad \text{ou} \quad z = \frac{-1}{i}\\
&\iff \boxed{z = -i \text{ ou } z = i}
\end{aligned}$$

3. $2z+\overline{z}=i+2$

Si z est un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique $z=a+ib$.
Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
2z+\overline{z}=i+2 &\iff 2(a+ib)+(a-ib)=i+2\\
&\iff 3a+ib=2+i\\
&\iff \begin{cases}3a=2\\ b=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=1\end{cases}\\
&\iff \boxed{z=\frac{2}{3}+i}
\end{aligned}$$

4. $z^2+2\overline{z}+1=0$

Si z est un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique $z=a+ib$.
Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
z^2+2\overline{z}+1=0 &\iff (a+ib)^2+2(a-ib)+1=0\\
&\iff a^2+2aib-b^2+2a-2ib+1=0\\
&\iff (a^2-b^2+2a+1)+i(2ab-2b)=0\\
&\iff \begin{cases}a^2-b^2+2a+1=0\\ 2b(a-1)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a^2+2a+1=0\\ b=0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}4-b^2=0\\ a=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}(a+1)^2=0\\ b=0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}b^2=4\\ a=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}b=2\\ a=1\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}b=-2\\ a=1\end{cases}\\
&\iff \boxed{z=-1 \quad \text{ou} \quad z=1+2i \quad \text{ou} \quad z=1-2i}
\end{aligned}$$

5. $z^4-3z^2-4=0$

On pose $Z=z^2$. L'équation devient alors $Z^2-3Z-4=0$.
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25$
$\Delta>0$ donc l'équation $Z^2-3Z-4=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $Z_1=-1$ et $Z_2=4$.
Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
z^4-3z^2-4=0 &\iff Z^2-3Z-4=0\\
&\iff Z=-1 \quad \text{ou} \quad Z=4\\
&\iff z^2=-1 \quad \text{ou} \quad z^2=4\\
&\iff \boxed{z=i \quad \text{ou} \quad z=-i \quad \text{ou} \quad z=-2 \quad \text{ou} \quad z=2}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points)

On considère le polynôme P à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$$

1. Montrer que i est une racine du polynôme P.

$$P(i)=i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=0$$

$P(i)=0$ donc i est une racine du polynôme P.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}(z - i)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - biz - ci \\ &= az^3 + (b - ai)z^2 + (c - bi)z - ci\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on a donc :

$$\begin{aligned}P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - ai = -4 - i \\ c - bi = 13 + 4i \\ -ci = -13i \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{P(z) = (z - i)(z^2 - 4z + 13)}$$

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
Commençons par résoudre l'équation $z^2 - 4z + 12 = 0$:
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36$
$\Delta < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2 \times 1} = 2 + 3i$$
$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2 \times 1} = 2 - 3i$$

Enfin, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}P(z) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (z - i)(z^2 - 4z + 12) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (z - i) = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 4z + 12 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{z = i \quad \text{ou} \quad z = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z = 2 - 3i}\end{aligned}$$

Exercice 4 (4 points)

On considère la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 3 + 2i \\ z_{n+1} = (1 + i) \times z_n + 3 - 2i \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = (1 - i)(1 + i)^n + 2 + 3i$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) \ : \ z_n = (1 - i)(1 + i)^n + 2 + 3i$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a d'une part $z_0 = 3 + 2i$ et d'autre part $(1 - i)(1 + i)^0 + 2 + 3i = 1 - i + 2 + 3i = 3 + 2i$.
  On a bien égalité donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Autrement dit, on suppose que $z_k = (1-i)(1+i)^k + 2 + 3i$.
  On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $z_{k+1} = (1-i)(1+i)^{k+1} + 2 + 3i$.
  On a :

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= (1+i) \times z_k + 3 - 2i \\
&= (1+i) \times \left[(1-i)(1+i)^k + 2 + 3i\right] + 3 - 2i \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= (1+i) \times (1-i)(1+i)^k + (1+i)(2+3i) + 3 - 2i \\
&= (1-i)(1+i)^{k+1} + 2 + 3i + 2i - 3 + 3 - 2i \\
&= (1-i)(1+i)^{k+1} + 2 + 3i
\end{aligned}$$

  Par conséquent, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :**
  Par le principe de récurrence, on a démontré que, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = (1-i)(1+i)^n + 2 + 3i}$.