Devoir Surveille N°1 (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (3 points)

En détaillant les calculs, mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$A = (2+3i)^2 \qquad B = \frac{1}{1+i} \qquad C = \frac{2+i}{2-4i} \qquad D = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$$

Exercice 2 (8 points)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.
On donnera à chaque fois le résultat sous forme algébrique.

1. $(1+2i)z = 1 - 2iz$

2. $(z+i)(iz+1) = 0$

3. $2z + \overline{z} = i + 2$

4. $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

5. $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$

Exercice 3 (5 points)

On considère le polynôme P à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

1. Montrer que i est une racine du polynôme P.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

3. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 (4 points)

On considère la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 3 + 2i \\ z_{n+1} = (1+i) \times z_n + 3 - 2i \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = (1-i)(1+i)^n + 2 + 3i$.