Correction Devoir Surveille N°1 (55min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) \quad : \quad \frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

- Initialisation : Pour $n=1$,
  Le terme de gauche vaut $\dfrac{2}{1\times 2\times 3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.
  Le terme de droite vaut $\dfrac{1\times(1+3)}{2\times(1+1)\times(1+2)}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.
  On a bien égalité donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Autrement dit, on suppose que

$$\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{k\times(k+1)\times(k+2)}=\frac{k(k+3)}{2(k+1)(k+2)}$$

  On veut démontrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{k\times(k+1)\times(k+2)}+\frac{2}{(k+1)\times(k+2)\times(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{2(k+2)(k+3)}$$

  On a :

$$\begin{aligned}
S&=\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{k\times(k+1)\times(k+2)}+\frac{2}{(k+1)\times(k+2)\times(k+3)}\\
&=\frac{k(k+3)}{2(k+1)(k+2)}+\frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&=\frac{k(k+3)}{2(k+1)(k+2)}\times\frac{k+3}{k+3}+\frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)}\times\frac{2}{2}\\
&=\frac{k(k+3)^2+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{k(k^2+6k+9)+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)(k+4)}{2(k+2)(k+3)}&=\frac{(k+1)(k+4)}{2(k+2)(k+3)}\times\frac{k+1}{k+1}\\
&=\frac{(k+1)^2(k+4)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{(k^2+2k+1)(k+4)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{k^3+4k^2+2k^2+8k+k+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{2(k+1)(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

Finalement, on a démontré que :

$$\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{k\times(k+1)\times(k+2)}+\frac{2}{(k+1)\times(k+2)\times(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{2(k+2)(k+3)}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\frac{2}{1\times 2\times 3}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+\frac{2}{3\times 4\times 5}+\ldots+\frac{2}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}}$$

Exercice 2

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que $85\,\%$ de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

1. Calculer a_1.
   $a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620.$
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
   Prendre 85% du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier ce nombre par 0,85.
   Par suite, on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a bien $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 3000 \\ &= 0,85a_n + 450 - 3000 \\ &= 0,85a_n - 2550 \\ &= 0,85(a_n - 3000) \\ &= 0,85v_n \end{aligned}$$

   De plus $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 - 2800$.
   Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   A l'aide de la question précédente, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ v_n &= -2800 \times 0,85^n \end{aligned}$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
   De plus, $v_n = a_n - 3000$ donc $a_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000}$$

(d) Conjecturer la limite de la suite (a_n) à l'aide de la calculatrice et interpréter dans le contexte de l'exercice.
On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3000$.
Cela signifie que mois après mois, le nombre de collaborateurs en télétravail va se rapprocher de 3000.

4. **(a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à p.

(b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(2500) ?
La valeur retournée par la commande seuil(2500) est 11.
A partir de 11 mois, le nombre de collaborateurs en télétravail aura dépassé strictement 2500.

```
def seuil(p):
  n = 0
  a = 200
  while a <= p :
     n = n + 1
     a = 0.85 * a + 450
  return n
```