

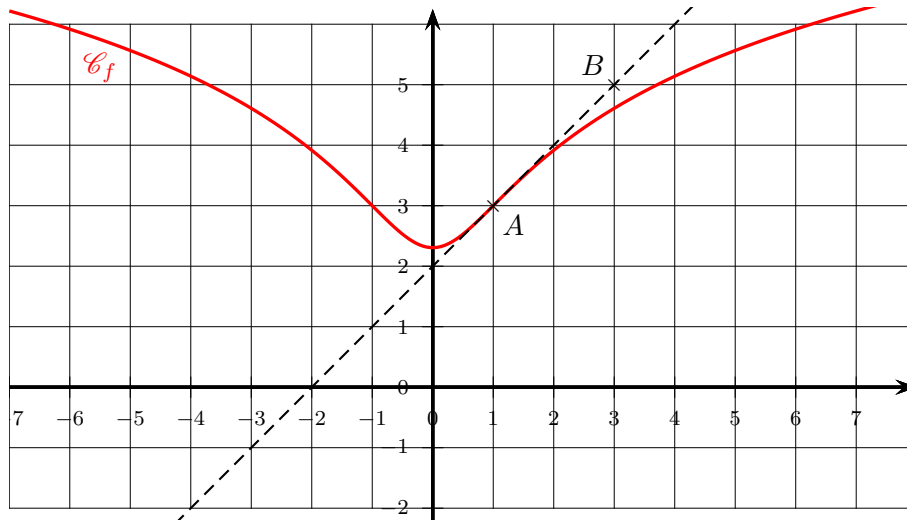
CORRECTION DEVOIR MAISON N°3

- Ce devoir maison **facultatif** est à rendre le **lundi 16 février**.
- Une note indicative sera donnée mais ne comptera pas dans votre moyenne.
- Des exercices similaires seront présents dans le DS6.
- Comme d'habitude, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.
- Vous pouvez tout à fait ne rendre qu'un seul exercice, des exercices incomplets, ou même me demander des indications sur Pronote.

Exercice 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1;3)$ et $B(3;5)$.

On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

$f(1) = 3$ et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = 1$.

2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.

- (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$.

- (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Tout d'abord,

$$f'(1) = 1 \iff \frac{2a \times 1}{a \times 1^2 + 1} = 1 \iff 2a = a + 1 \iff a = 1$$

Par suite,

$$f(1) = 3 \iff \ln(1^2 + 1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln(2)$$

En conclusion, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$$

1. Montrer que f est une fonction paire.

Quelle interprétation graphique peut-on alors faire concernant la courbe représentative de la fonction f ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln(2) \\ &= \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f est paire.

On peut en déduire que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \ln(2) = 3 - \ln(2)$ donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, la fonction f est paire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. Déterminer l'expression de $f'(x)$. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x$.

$$2x = 0 \iff x = 0$$

$$2x > 0 \iff x > 0$$

$$2x < 0 \iff x < 0$$

On en déduit le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln(2)$	$+\infty$

$$f(0) = \ln(0^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 - \ln(2)$$

4. A l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

D'après la tableau des variations, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si, et seulement si, $k > 3 - \ln(2)$.

Pour le démontrer rigoureusement, il aurait fallu utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 + \ln(2) &\iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \\ &\iff \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2) \\ &\iff \ln(x^2 + 1) = \ln(4) \\ &\iff x^2 + 1 = 4 \\ &\iff x^2 = 3 \\ &\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$ admet donc deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Graphiquement, il semble que la courbe $\mathcal{C}_f$ admette deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times (x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ \boxed{f''(x) &= \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}} \end{aligned}$$

3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
Pour déterminer la convexité de la fonction f , nous allons étudier le signe de la fonction f'' .
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + 1)^2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1 - x$	+	+	0	-	
$1 + x$	-	0	+	+	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
Convexité de f	concave		convexe		concave

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est donc [-1; 1].

Exercice 2

On considère un tétraèdre $ABCD$.

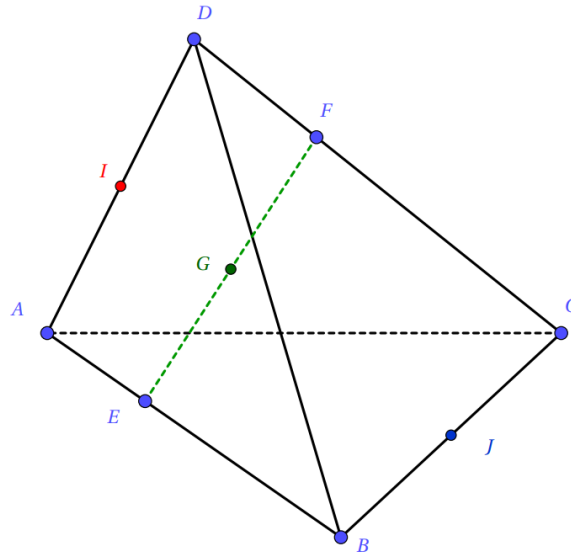
Les points I et J sont les milieux des arêtes $[AD]$ et $[BC]$.

Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

G est le milieu de $[EF]$.

On admet que :

$$\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$



1. Montrer que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

car I est le milieu de $[AD]$

2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

car I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[BC]$

d'après la relation de Chasles

3. Que peut-on en déduire concernant les points I , J et G ?

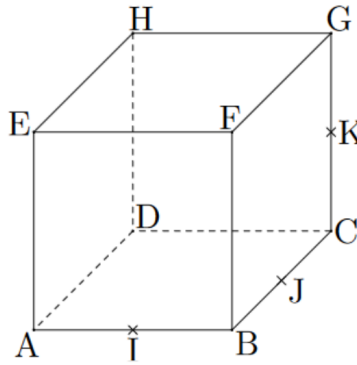
Justifier votre réponse.

Grâce aux deux questions précédentes, on constate que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IG}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont colinéaires et les points I , J et G sont donc alignés.

Exercice 3

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$. On souhaite étudier la coplanarité des points E , I , J et K .



1. Première méthode

(a) Exprimer chacun des vecteurs $\vec{EI}$, $\vec{EJ}$ et $\vec{EK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{EA}$, $\vec{EF}$ et $\vec{EH}$.

$$\vec{EI} = \vec{EA} + \vec{AI}$$

d'après la relation de Chasles

$$\vec{EI} = \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

car I est le milieu de $[AB]$

$$\boxed{\vec{EI} = \vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{EF}}$$

car $ABCDEFGH$ est un cube

$$\vec{EJ} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BJ}$$

d'après la relation de Chasles

$$\vec{EJ} = \vec{EA} + \vec{EF} + \vec{BJ}$$

car $ABCDEFGH$ est un cube

$$\vec{EJ} = \vec{EA} + \vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{BC}$$

car J est le milieu de $[BC]$

$$\boxed{\vec{EJ} = \vec{EA} + \vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}}$$

car $ABCDEFGH$ est un cube

$$\vec{EK} = \vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GK}$$

d'après la relation de Chasles

$$\vec{EK} = \vec{EF} + \vec{EH} + \vec{GK}$$

car $ABCDEFGH$ est un cube

$$\vec{EK} = \vec{EF} + \vec{EH} + \frac{1}{2}\vec{GC}$$

car K est le milieu de $[CG]$

$$\boxed{\vec{EK} = \frac{1}{2}\vec{EA} + \vec{EF} + \vec{EH}}$$

car $ABCDEFGH$ est un cube

(b) Montrer que $\vec{EI}$ et $\vec{EK}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode 1 :

La droite (EI) est incluse dans le plan (ABF) et K n'appartient pas à ce plan donc, E , I et K ne sont pas alignés et ainsi les vecteurs $\vec{EI}$ et $\vec{EK}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode 2 :

Les vecteurs $\vec{EA}$, $\vec{EF}$ et $\vec{EH}$ ne sont pas coplanaires donc $(\vec{EA}, \vec{EF}, \vec{EH})$ est une base de l'espace.

D'après la question précédente, les coordonnées des vecteurs $\vec{EI}$ et $\vec{EK}$ dans cette base sont :

$$\vec{EI} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{EK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc $\vec{EI}$ et $\vec{EK}$ ne sont pas colinéaires.

(c) Déterminer s'il existe, ou non, deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{EJ} = x\overrightarrow{EI} + y\overrightarrow{EK}$$

et conclure.

Les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas coplanaires donc $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$ est une base de l'espace.

D'après la question 1.(a), les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ dans cette base sont :

$$\overrightarrow{EI} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à déterminer s'il existe un couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{EJ} = x\overrightarrow{EI} + y\overrightarrow{EK}$.

$$\begin{cases} 1 = x + \frac{1}{2}y \\ 1 = \frac{1}{2}x + y \\ \frac{1}{2} = y \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{4} = x \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ ne sont pas coplanaires.

En conclusion, les points E , I , J et K ne sont pas coplanaires.

2. Deuxième méthode

(a) Démontrer que les droites (EG) et (IJ) sont parallèles.

Méthode 1 :

Comme $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$, $EAGC$ est un parallélogramme donc (EG) est parallèle à (AC) .

De plus, par le théorème de la droite des milieux, (AC) est parallèle à (IJ) donc (EG) est parallèle à (IJ) .

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CG} && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} && \text{car } ABCDEFGH \text{ est un cube} \\ &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{BJ} && \text{car } I \text{ est le milieu de } [AB] \text{ et } J \text{ est le milieu de } [BC] \\ &= 2\overrightarrow{IJ} && \text{d'après la relation de Chasles} \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les droites (EG) et (IJ) sont parallèles.

(b) Montrer que K n'appartient pas au plan (EGI) et conclure.

Comme (EG) et (IJ) sont parallèles, les points E , G , I et J sont coplanaires. Ainsi, le plan (EGI) est confondu avec le plan (IJG) .

Supposons par l'absurde que le point K appartient au plan (EGI) . Les points I , J , G et K sont alors coplanaires, c'est-à-dire que le point I appartient au plan (JKG) , ce qui est absurde.

Par conséquent, le point K n'appartient pas au plan (EGI) et donc le point K n'appartient pas non plus au plan (EIJ) puisque E , G , K et J sont coplanaires.

En conclusion, les points E , I , J et K ne sont pas coplanaires.