

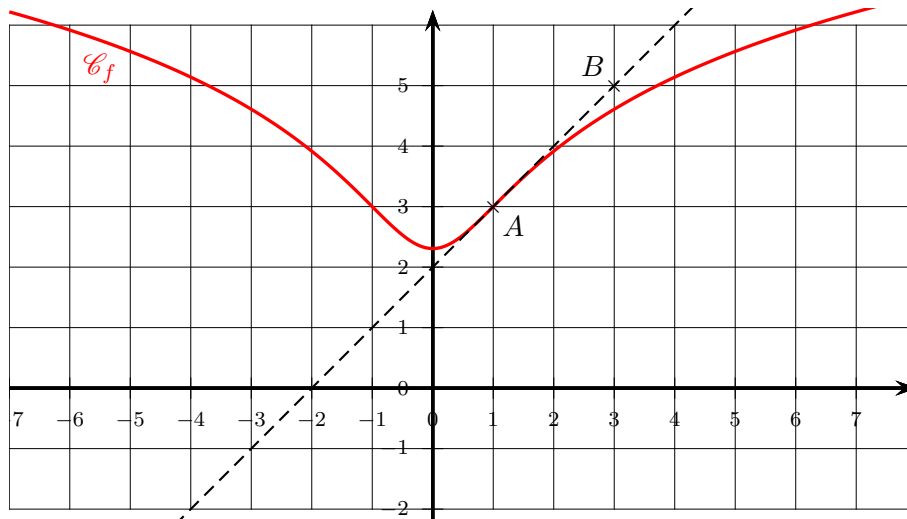
DEVOIR MAISON N°3

- Ce devoir maison **facultatif** est à rendre le **lundi 16 février**.
- Une note indicative sera donnée mais ne comptera pas dans votre moyenne.
- Des exercices similaires seront présents dans le DS6.
- Comme d'habitude, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.
- Vous pouvez tout à fait ne rendre qu'un seul exercice, des exercices incomplets, ou même me demander des indications sur Pronote.

Exercice 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1;3)$ et $B(3;5)$.

On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
Quelle interprétation graphique peut-on alors faire concernant la courbe représentative de la fonction f ?
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Déterminer l'expression de $f'(x)$. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites.
- A l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
- Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

- Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
- En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 2

On considère un tétraèdre $ABCD$.

Les points I et J sont les milieux des arêtes $[AD]$ et $[BC]$.

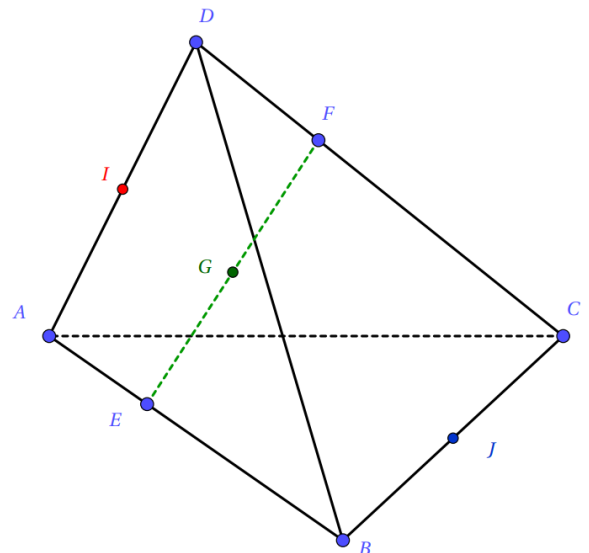
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

G est le milieu de $[EF]$.

On admet que :

$$\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

- Montrer que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
- Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- Que peut-on en déduire concernant les points I , J et G ?
Justifier votre réponse.



Exercice 3

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CG]$.

On souhaite étudier la coplanarité des points E , I , J et K .

1. Première méthode

- Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.
- Montrer que $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EK}$ ne sont pas colinéaires.
- Déterminer s'il existe, ou non, deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{EJ} = x\overrightarrow{EI} + y\overrightarrow{EK}$$

et conclure.

2. Deuxième méthode

- Démontrer que les droites (EG) et (IJ) sont parallèles.
- Montrer que K n'appartient pas au plan (EGI) et conclure.

