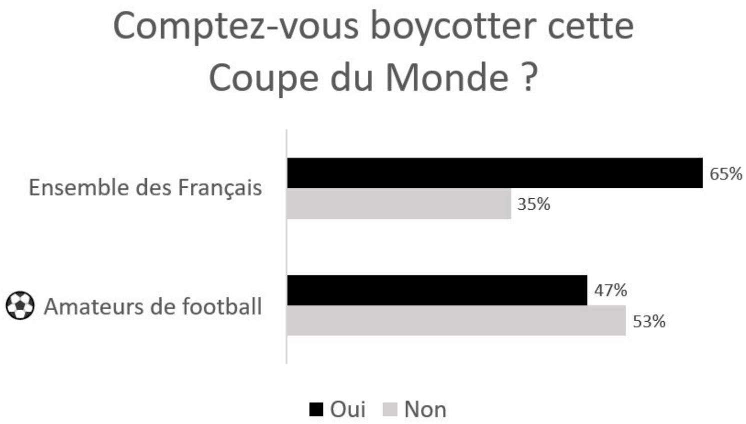
Correction Devoir Maison N°2

Exercice 1

De plus en plus de voix s'élèvent pour appeler au boycott de la Coupe du monde de football qui se tiendra au Qatar du 20 novembre au 18 décembre 2022. Ainsi, de nombreux Français refuseront de regarder les matchs face aux nombreuses polémiques qui entourent la compétition : aberration écologique des stades climatisés, soupçons de corruption, négation des droits de l'Homme, ...
Un institut de sondage s'est intéressé à la question et a obtenu les résultats ci-dessous.



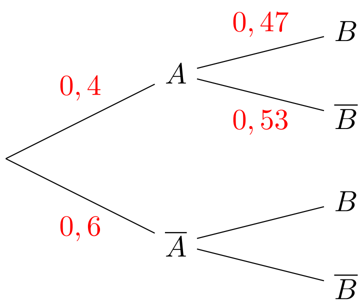
Enfin, parmi les Français interrogés, 40% d'entre eux se considèrent comme amateurs de football.
On interroge au hasard un Français et on considère les événements :

- A : « la personne interrogée est un amateur de football »
- B : « la personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde »

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent respectivement les événements contraires des événements A et B.

1. **(a)** Donner la probabilité de l'événement B.
65% des Français comptent boycotter la Coupe du monde donc $P(B) = 0,65$.

(b) Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous sur les quatre branches indiquées.



(c) Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit un amateur de football comptant boycotter la Coupe du Monde est égale à $0,188$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P_A(B) \\ &= 0,4 \times 0,47 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,188}$$

La probabilité que la personne interrogée soit un amateur de football comptant boycotter la Coupe du Monde est égale à $0,188$.

(d) On sait que la personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde.
Quelle est la probabilité que ce soit un amateur de football ?
On arrondira le résultat au millième.
On cherche à calculer $P_B(A)$.

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,188}{0,65} \\ &\boxed{P_B(A) \approx 0,289} \end{aligned}$$

Sachant que la personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde, la probabilité que ce soit un amateur de football est d'environ $0,289$.

(e) Le sondage affirme enfin que, parmi les Français qui ne sont pas amateurs de football, plus de trois quarts sont prêts à boycotter la Coupe du Monde. Justifier l'affirmation du sondage.
On cherche à calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

$\{A, \overline{A}\}$ forme une une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Ainsi, on a $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,65 - 0,0,188 = 0,462$.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(B) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \\ &= \frac{0,462}{0,6} \\ &\boxed{P_{\overline{A}}(B) = 0,77 > 0,75} \end{aligned}$$

Parmi les Français qui ne sont pas amateurs de football, 77% sont prêts à boycotter la Coupe du Monde.
L'affirmation du sondage est donc vraie.

2. On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 20 Français choisis au hasard dans la population, associe le nombre de Français de cet échantillon comptant boycotter la Coupe du Monde.
On suppose que la population française est suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
Chaque personne interrogée est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde » de probabilité $p = 0,65$. On suppose que la population française est suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise donc les tirages sont identiques et indépendants. X comptant le nombre de succès, la variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,65$.

(b) Déterminer, en détaillant votre calcul, la probabilité qu'exactement douze des vingt personnes interrogées comptent boycotter la Coupe du Monde.
On arrondira le résultat au millième.

$$P(X = 12) = \binom{20}{12} \times 0,65^{12} \times (1 - 0,65)^{20-12} \approx 0,161$$

la probabilité qu'exactement douze des vingt personnes interrogées comptent boycotter la Coupe du Monde est d'environ $0,161$.

3. Dans cette question, on note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de n Français choisis au hasard dans la population, associe le nombre de Français de cet échantillon comptant boycotter la Coupe du Monde.
On suppose que la population française est suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

(a) Démontrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,35^n$.

X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,65$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,65^0 \times (1 - 0,65)^{n-0} \\ &= 1 - 0,35^n \end{aligned}$$

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimum de Français à interroger pour que la probabilité qu'au moins un Français compte boycotter la Coupe du Monde soit supérieure à $0,999$.

$P(X \geqslant 1)$ est la probabilité de l'événement « au moins un des Français interrogés compte boycotter la Coupe du Monde ». On cherche donc à déterminer le plus petit entier n tel que

$$P(X \geqslant 1) > 0,999 \iff 1 - 0,35^n > 0,999$$

La suite de terme général $u_n = 1 - 0,35^n$ est strictement croissante. Par ailleurs :

$$\begin{cases} 1 - 0,35^6 \approx 0,9982 < 0,999 \\ 1 - 0,35^7 \approx 0,9994 > 0,999 \end{cases} \Rightarrow n = 7$$

De ce fait, le nombre minimum de Français à interroger pour que la probabilité qu'au moins un Français compte boycotter la Coupe du Monde soit supérieure à $0,999$ est de 7 Français.

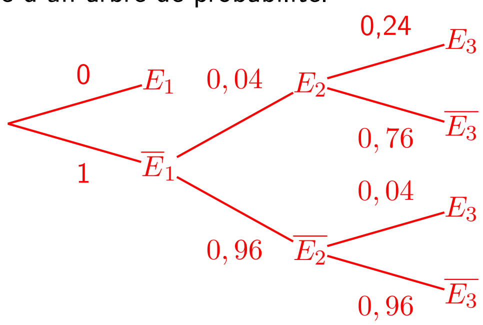
Exercice 2

L'hiver approche et la grippe fait son grand retour dans les couloirs du lycée.
On s'intéresse à la probabilité qu'un élève soit absent durant cette épidémie de grippe.

- Un élève malade est absent.
- La première semaine de cours, l'élève n'est pas malade.
- Si la semaine n l'élève n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n l'élève est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « l'élève est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **(a)** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



$\{E_2, \overline{E_2}\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

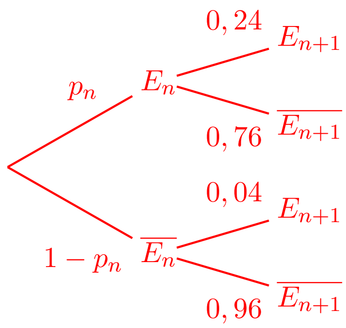
$$\begin{aligned} p_3 &= P(E_3) \\ &= P(E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_2} \cap E_3) \\ &= P(E_2) \times P_{E_2}(E_3) + P(\overline{E_2}) \times P_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 \\ &= 0,048 \end{aligned}$$

(b) Sachant que l'élève a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
On cherche à calculer $P_{E_3}(E_2)$.

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = 0,2$$

Sachant que l'élève a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine est égale à $0,2$.

2. **(a)** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



(b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
$\left\{E_n, \overline{E_n}\right\}$ est une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(E_{n+1}) \\ &= P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) \\ &= P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,24 + (1-p_n) \times 0,04 \\ &= 0,2p_n + 0,04 \end{aligned}$$

(c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,05 \\ &= 0,2p_n + 0,04 - 0,05 \\ &= 0,2p_n - 0,01 \\ &= 0,2(p_n - 0,05) \\ &= 0,2u_n \end{aligned}$$

De plus, $u_1 = p_1 - 0,05 = 0 - 0,05 = -0,05$.
Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $u_1 = -0,05$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\ u_n &= -0,05 \times 0,2^{n-1} \end{aligned}$$

Enfin, comme $u_n = p_n - 0,05 \iff p_n = u_n + 0,05$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = -0,05 \times 0,2^{n-1} + 0,05$$

(d) En déduire la limite de la suite (p_n).
Comme $-1 < 0,2 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^{n-1} = 0$.
Ainsi, par somme et produit de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = -0,05$.

(e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-\mathsf{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times$ P $+ 0,04$
	J prend la valeur J $+1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

Retranscrire cet algorithme en Python.
A quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

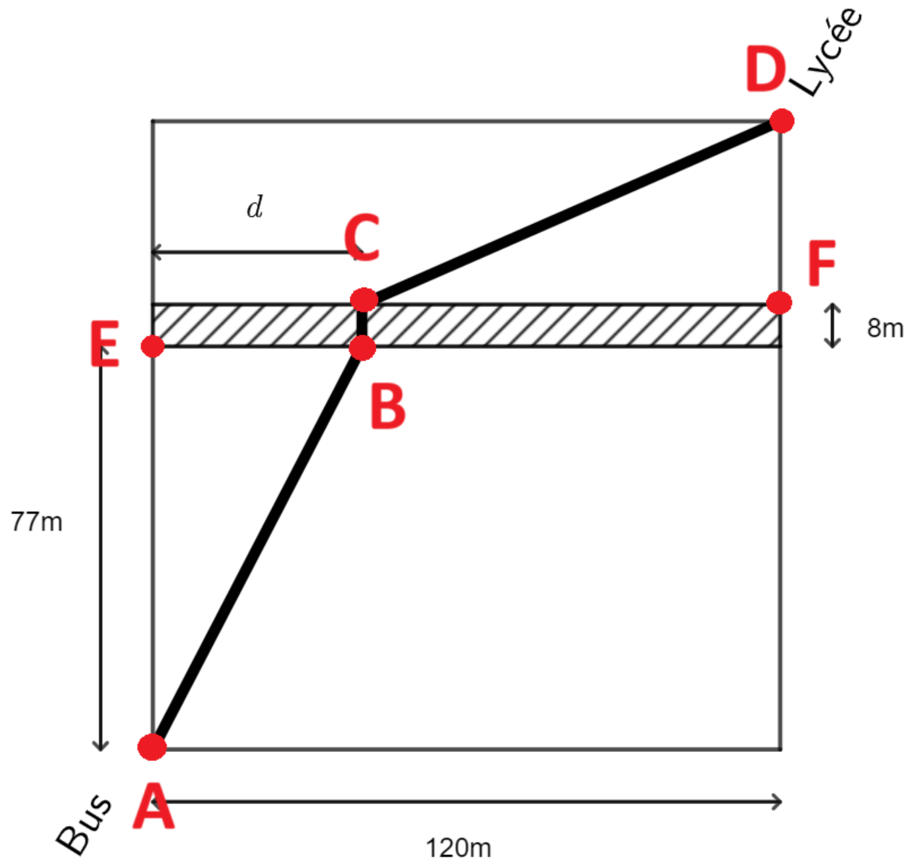
```
P=0
J=1
K=int(input("Saisir la valeur de K : "))
while P < 0.05-10**(-K) :
    P=0.2*P+0.04
    J=J+1
print(J)
```

Le nombre J qui est affiché en sortie de l'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite $0,05$ à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.
La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite déterminée dans la question **2.(d)**.

Exercice facultatif

Les élèves du lycée Jacques Monod ont la fâcheuse tendance à trop souvent arriver quelques minutes en retard en classe. Pour en finir avec ce problème, le maire de Clamart décide d'installer un passage piéton afin que les élèves qui sortent du bus puissent traverser la route rapidement et arriver au plus vite au lycée.
La figure ci-dessous est un carré qui représente les alentours du lycée et la route est la partie hachurée.

On suppose qu'un élève doit passer sur le passage piéton.
A quelle distance d doit-on placer le passage piéton pour que la distance parcourue par un élève soit minimale ?



Il était possible de résoudre ce problème de façon bien plus simple et astucieuse, par exemple à l'aide du théorème de Thalès ! Ici, nous allons développer la méthode calculatoire, brutale et assez technique...

Considérons les points placés ci-dessus sur la figure.
Notons x la distance EB et déterminons la distance de la ligne brisée $ABCD$.

- Le triangle ABE est rectangle en E donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AE^2 + EB^2$$
$$AB^2 = 77^2 + x^2$$
$$AB = \sqrt{x^2 + 5929}$$

- $BC = 8$
- Le triangle CDF est rectangle en F donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$CD^2 = CF^2 + FD^2$$
$$CD^2 = (120 - x)^2 + (120 - 77 - 8)^2$$
$$CD = \sqrt{(120 - x)^2 + 35^2}$$
$$CD = \sqrt{(120 - x)^2 + 1225}$$

On remarque que chacune des expressions définissant AB et CD sont définies et strictement positives pour tout nombre réel x. En effet, l'expression sous leur radical est obtenu par la somme de deux carrés dont l'un, au moins, est non-nul.

Soit f la fonction définie sur $[0;120]$ qui, à une valeur de x donnée, associe l'expression de la longueur de la ligne brisée $ABCD$.

$$f(x) = AB + BC + CD$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x^2+5929} + 8 + \sqrt{(120-x)^2+1225}}$$

La fonction f est dérivable sur $[0;120]$ et, pour tout $x \in [0;120]$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5929}} + 0 + \frac{2x-240}{2\sqrt{(120-x)^2+1225}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5929}} + 0 + \frac{x-120}{\sqrt{(120-x)^2+1225}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x\sqrt{(120-x)^2+1225} + (x-120)\sqrt{x^2+5929}}{\sqrt{x^2+5929} \times \sqrt{(120-x)^2+1225}}}$$

Pour tout $x \in [0;120]$, $\sqrt{x^2+5929} \times \sqrt{(120-x)^2+1225} > 0$.
Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que le numérateur $x\sqrt{(120-x)^2+1225} + (x-120)\sqrt{x^2+5929}$.

Nous allons donc résoudre, dans la joie et la bonne humeur, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0;120]$.

$$\begin{aligned}
f'(x) \geqslant 0 \quad & \iff \quad x\sqrt{(120-x)^2+1225} + (x-120)\sqrt{x^2+5929} \geqslant 0 \\
& \iff \quad x\sqrt{(120-x)^2+1225} \geqslant (120-x)\sqrt{x^2+5929} \\
& \iff \quad \left(x\sqrt{(120-x)^2+1225}\right)^2 \geqslant \left((120-x)\sqrt{x^2+5929}\right)^2 \text{ car les deux termes sont positifs sur } [0;120] \\
& \iff \quad x^2((120-x)^2+1225) \geqslant (120-x)^2(x^2+5929) \\
& \iff \quad 14400x^2 - 240x^3 + x^4 + 1225x^2 \geqslant (14400 - 240x + x^2)(x^2+5929) \\
& \iff \quad 14400x^2 - 240x^3 + x^4 + 1225x^2 \geqslant 14400x^2 + 85377600 - 240x^3 - 1422960x + x^4 + 5929x^2 \\
& \iff \quad \boxed{-4704x^2 + 1422960x - 85377600 \geqslant 0}
\end{aligned}$$

Et nous voilà avec une inéquation du second degré des plus élémentaires !
Commençons par résoudre l'équation $-4704x^2 + 1422960x - 85377600 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1422960)^2 - 4 \times (-4704) \times (-85377600) = 418350240000$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1422960 + \sqrt{418350240000}}{2 \times (-4704)} = \frac{165}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1422960 - \sqrt{418350240000}}{2 \times (-4704)} = 220$$

De plus, $a = -4704 < 0$ donc la fonction $x \mapsto -4704x^2 + 1422960x - 85377600$ est négative à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau de signes de la fonction f' et le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;120]$:

x	0		$\frac{165}{2}$		120
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Sur l'intervalle $[0;120]$, la fonction f admet un minimum en $x = \frac{165}{2}$.
Ainsi, après avoir fait vérifier ses calculs auprès des élèves du lycée, le maire de Clamart décide donc de placer le passage piéton à une distance telle que $\boxed{\text{le point } B \text{ sera placé à } 82{,}5\text{m du bord}}$.