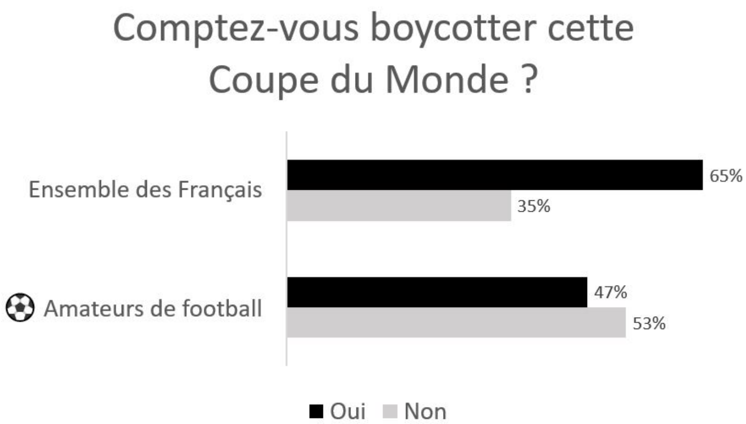
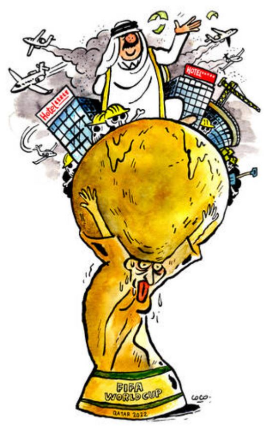
Devoir Maison N°2

- Ce devoir maison **facultatif** est à rendre le **mardi 02 décembre**.
- Une note indicative sera donnée mais ne comptera pas dans votre moyenne.
- Au moins un de ces deux exercices sera présent de façon très similaire dans le DS4.
- Comme d'habitude, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.
- Vous pouvez tout à fait ne rendre qu'un seul exercice, des exercices incomplets, ou même me demander des indications sur Pronote.

Exercice 1

De plus en plus de voix s'élèvent pour appeler au boycott de la Coupe du monde de football qui se tiendra au Qatar du 20 novembre au 18 décembre 2022. Ainsi, de nombreux Français refuseront de regarder les matchs face aux nombreuses polémiques qui entourent la compétition : aberration écologique des stades climatisés, soupçons de corruption, négation des droits de l'Homme, ...
Un institut de sondage s'est intéressé à la question et a obtenu les résultats ci-dessous.





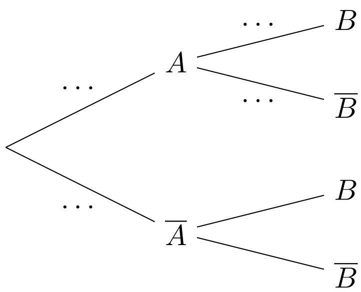
Enfin, parmi les Français interrogés, 40% d'entre eux se considèrent comme amateurs de football.
On interroge au hasard un Français et on considère les événements :

- A : « la personne interrogée est un amateur de football »
- B : « la personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde »

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent respectivement les événements contraires des événements A et B.

1. **(a)** Donner la probabilité de l'événement B.

(b) Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous sur les quatre branches indiquées.



(c) Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit un amateur de football comptant boycotter la Coupe du Monde est égale à $0,188$.

(d) On sait que la personne interrogée compte boycotter la Coupe du Monde.
Quelle est la probabilité que ce soit un amateur de football ?

(e) Le sondage affirme enfin que, parmi les Français qui ne sont pas amateurs de football, plus de trois quarts sont prêts à boycotter la Coupe du Monde. Justifier l'affirmation du sondage.

2. On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 20 Français choisis au hasard dans la population, associe le nombre de Français de cet échantillon comptant boycotter la Coupe du Monde.
On suppose que la population française est suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.

(b) Déterminer, en détaillant votre calcul, la probabilité qu'exactement douze des vingt personnes interrogées comptent boycotter la Coupe du Monde.
On arrondira le résultat au millième.

3. Dans cette question, on note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de n Français choisis au hasard dans la population, associe le nombre de Français de cet échantillon comptant boycotter la Coupe du Monde.
On suppose que la population française est suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

(a) Démontrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,35^n$.

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimum de Français à interroger pour que la probabilité qu'au moins un Français compte boycotter la Coupe du Monde soit supérieure à $0,999$.

Exercice 2

L'hiver approche et la grippe fait son grand retour dans les couloirs du lycée.
On s'intéresse à la probabilité qu'un élève soit absent durant cette épidémie de grippe.

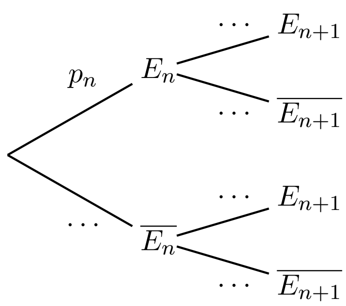
- Un élève malade est absent.
- La première semaine de cours, l'élève n'est pas malade.
- Si la semaine n l'élève n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n l'élève est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « l'élève est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

(b) Sachant que l'élève a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



(b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

(c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.

(d) En déduire la limite de la suite (p_n).

(e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-\text{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times$ P $+ 0,04$
	J prend la valeur J $+1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

Retranscrire cet algorithme en Python.
A quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Pour se faire mal aux neurones...

Les élèves du lycée Jacques Monod ont la fâcheuse tendance à trop souvent arriver quelques minutes en retard en classe. Pour en finir avec ce problème, le maire de Clamart décide d'installer un passage piéton afin que les élèves qui sortent du bus puissent traverser la route rapidement et arriver au plus vite au lycée.
La figure ci-dessous est un carré qui représente les alentours du lycée et la route est la partie hachurée.

On suppose qu'un élève doit passer sur le passage piéton.
A quelle distance d doit-on placer le passage piéton pour que la distance parcourue par un élève soit minimale ?