Devoir Maison N°1

- Ce devoir maison **facultatif** est à rendre le **vendredi 07 novembre**.
- Une note indicative sera donnée mais ne comptera pas dans votre moyenne.
- Au moins un de ces deux exercices sera présent de façon très similaire dans le DS3.
- Comme d'habitude, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.
- Vous pouvez tout à fait ne rendre qu'un seul exercice, des exercices incomplets, ou même me demander des indications sur Pronote.

Exercice 1

Un statisticien souhaite étudier l'évolution du nombre d'élèves au lycée Jacques Monod au fil des années.
Cette population est estimée à 1 200 élèves en 2020. Même si l'on construit des bâtiments encore et encore, les contraintes font que le nombre d'élèves ne peut pas dépasser les 3 000 élèves.

Partie A : Un premier modèle

Dans une première approche, le statisticien estime que le nombre d'élèves croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'élèves, exprimé en milliers, en $2020 + n$. On a donc $v_0 = 1,2$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu ?

Partie B : Un second modèle

Le statisticien modélise ensuite l'évolution annuelle du nombre d'élèves par une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,2 \\ u_{n+1} = -0,04u_n^2 + 1,1u_n \end{cases}$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -0,04x^2 + 1,1x.$$

(a) Justifier que g est croissante sur $[0;3]$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2,5$.
(c) En déduire la convergence de la suite (u_n).
(d) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$.
En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le statisticien souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 2 000 élèves avec ce second modèle.

(a) Écrire un algorithme en langage Python pour qu'il réponde au problème posé.
(b) Quelle valeur va renvoyer l'algorithme ? Justifier votre réponse.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}.$$

Partie A

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. **(a)** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1. **(a)** Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.
2. **(a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}.$$
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie C

On considère la fonction Python ci-contre.

1. Compléter le programme ci-contre à l'aide des pointillés.
2. Déterminer la valeur affichée après exécution de ce programme.
   Interpréter cette valeur.

```
def lim():
  u = ...
  n = ...
  while u >= 1.01 :
     u = ...
     n = ...
  return n
```

Partie D

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - 1 = \left(\frac{2}{u_n + 4}\right)(u_n - 1).$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < \frac{2}{u_n + 4} \leqslant \frac{2}{5}.$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 5.$$
4. En utilisant le Théorème 10 du cours, en déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.