

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°5 (55MIN)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté aux justifications.

Une petite entreprise produit et commercialise entre 0 et 60 objets par jour. Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est modélisé à l'aide de la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par :

$$C(x) = 2x^2 - 60x + 602$$

Chaque objet est vendu 40 euros.

PARTIE A : Étude avec un tableur

Le chef d'entreprise a réalisé le tableur suivant :

	A	B	C	D
1	x	Recette	Coût	Bénéfice
2	1	40	544	-504
3	2	80	490	-410
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			
12	11			
13	12			
14	...			

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule **B2**, permet d'obtenir par recopie vers le bas, la recette en fonction du nombre d'objets fabriqués et vendus chaque jour.
 $=A2*40$
2. Donner une formule qui, saisie dans la cellule **C2**, permet d'obtenir par recopie vers le bas, le coût en fonction du nombre d'objets fabriqués et vendus chaque jour.
 $=2*A2*A2-60*A2+602$
3. Donner une formule qui, saisie dans la cellule **D2**, permet d'obtenir par recopie vers le bas, le bénéfice en fonction du nombre d'objets fabriqués et vendus chaque jour.
 $=B2-C2$
4. Calculer les valeurs associées aux cellules B7, C7 et D7.
Dans la cellule B7, on a $6 \times 40 = 240$.
Dans la cellule C7, on a $2 \times 6^2 - 60 \times 6 + 602 = 314$.
Dans la cellule D7, on a $240 - 314 = -74$.

PARTIE B : Étude graphique

1. Donner l'expression de la recette $R(x)$, en euros, en fonction de x .
Chaque objet est vendu 40 euros donc $R(x) = 40x$.
2. Tracer sur l'énoncé avec précision la courbe représentative de la fonction recette.
3. Par lecture graphique, déterminer :
 - (a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
Il semblerait que l'entreprise réalise des bénéfices lorsqu'elle vend entre 7 et 43 objets.
 - (b) la production pour laquelle le bénéfice est maximal.
Le bénéfice semble maximal lorsque l'entreprise vend 25 objets.

PARTIE C : Étude algébrique

1. Donner la formule qui relie la recette R , les coûts de production C et le bénéfice B .
 $Bénéfice = Recette - Coûts$

2. Démontrer que le bénéfice, en euros, pour la vente de x objets est donné par la fonction B définie par :

$$B(x) = -2x^2 + 100x - 602$$

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 40x - (2x^2 - 60x + 602) && \text{Attention aux parenthèses!} \\ &= 40x - 2x^2 + 60x - 602 \\ &= -2x^2 + 100x - 602 \end{aligned}$$

3. Justifier que, pour tout réel $x \in [0; 60]$, $B(x) = -2(x - 7)(x - 43)$.

$$\begin{aligned} \text{On va développer l'expression } -2(x - 7)(x - 43). \\ -2(x - 7)(x - 43) &= -2(x \times x + x \times (-43) - 7 \times x - 7 \times (-43)) \\ &= -2(x^2 - 7x - 43x + 301) \\ &= -2(x^2 - 50x + 301) \\ &= -2x^2 + 100x - 602 \\ &= B(x) \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de signes de la fonction B .

$$\begin{array}{ll} x - 7 = 0 & x - 43 = 0 \\ x = 7 & x = 43 \end{array}$$

x	0	7	43	60		
-2		-	-	-		
$x - 7$		-	0	+	+	$m = 1 > 0$
$x - 43$		-	-	0	+	$m = 1 > 0$
$-2(x - 7)(x - 43)$		-	0	+	0	-

5. En déduire la quantité d'objets que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice.

D'après la question précédente, on a $B(x) \geq 0$ lorsque $x \in [7; 43]$.
Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle vend entre 7 et 43 objets.

6. Déterminer le montant du bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise en vendant ses objets.

L'abscisse du sommet de la parabole se situe en $x = \frac{7+43}{2} = 25$.
De plus, $B(25) = -2 \times 25^2 + 100 \times 25 - 602 = 648$.
En conclusion, l'entreprise réalise un bénéfice maximal de 648€ lorsqu'elle vend 25 objets.

