Correction Devoir Surveillé N°4 (55min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Les éoliennes en France (3 points)

En France, à la fin de l'année 2005, on comptait 940 éoliennes. Depuis, chaque année, 500 éoliennes supplémentaires ont été installées. On note, pour tout entier naturel n, u_n le nombre d'éoliennes installées en France à la fin de l'année $2005 + n$.
On a donc $u_0 = 940$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n).
Chaque année, le nombre d'éoliennes augmente de 500 donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 500$.
Par conséquent, (u_n) est une suite arithmétique.

2. En expliquant votre démarche, déterminer le nombre d'éoliennes en France en 2025.
D'après ce qui précède, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 940$ et de raison $r = 500$.
$2025 = 2005 + 20$ donc $u_{20} = u_0 + 20 \times r = 940 + 500 \times 20 = 10940$.
En 2025, il y a 10940 éoliennes en France.

Exercice 2 - Contrats de location (7 points)

Le but de cet exercice est de comparer l'évolution des frais annuels de fonctionnement à partir de l'année 2020 de deux associations d'aide à la personne : Association n°1 et Association n°2.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n le montant des frais de fonctionnement, en euros, de l'Association n°1 pour l'année $(2020 + n)$.
- v_n le montant des frais de fonctionnement, en euros, de l'Association n°2 pour l'année $(2020 + n)$.

On a effectué un relevé pour les premières années et réalisé la feuille de calcul ci-contre :

	A	B	D
1	n	$u(n)$	$v(n)$
2	0	2 000	2 700
3	1	2 250	2 808
4	2	2 500	2 920,32
5	3	2 750	3 037,1328

1. Pourquoi peut-on conjecturer que la suite (u_n) est une suite arithmétique ?
Chaque année, le montant de l'Association n°1 semble augmenter de 250€.
On peut donc conjecturer que (u_n) est une suite arithmétique.

2. On admet que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

(a) Écrire une relation entre u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 250$.

(b) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 afin d'obtenir, en étirant vers le bas, les premiers termes de la suite (u_n) ?
=B2+250

3. On admet que la suite (v_n) est géométrique.

(a) Écrire une relation entre v_n et v_{n+1} pour tout entier naturel n.
Pour passer de 2700 à 2808, on a multiplié par $\dfrac{2808}{2700} = 1,04$.
Comme la suite (v_n) est géométrique, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n \times 1,04$.

(b) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C3 afin d'obtenir, en étirant vers le bas, les premiers termes de la suite (v_n) ?
=C2*1,04

4. En détaillant vos calculs, déterminer une estimation des frais de fonctionnement de ces deux associations pour l'année 2030. Les résultats seront arrondis à l'euro.
$2030 = 2020 + 10$ donc on cherche à calculer u_{10} et v_{10}.
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2000$ et de raison $r = 250$ donc

$$u_{10} = u_0 + 10 \times r = 2000 + 10 \times 250 = 4500$$

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2700$ et de raison $q = 1,04$ donc

$$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 2700 \times 1,04^{10} \approx 3997$$

Pour l'année 2030, les frais de l'Association n°1 seront de 4500€ et ceux de l'Association n°2 seront de 3997€.

Exercice 3 - Élèves à Monod (10 points)

En septembre 2020, le lycée Jacques Monod a accueilli 1320 élèves. Le lycée peut accueillir au maximum 1700 élèves.
Le maire de Clamart s'est appuyé sur les chiffres des années précédentes et a remarqué que le lycée perd chaque année 3% de ses élèves qui partent dans d'autres lycées. Inversement, on constate qu'en moyenne 75 élèves arrivent au lycée Jacques Monod en provenance d'ailleurs chaque année.

On modélise l'évolution du nombre d'élèves au lycée par une suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'élèves en septembre de l'année $2020 + n$. On a donc $u_0 = 1320$. Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

1. Montrer que $u_1 \approx 1355$.
   $1320 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) + 75 = 1355,4 \approx 1355$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,97u_n + 75$.
   Diminuer une valeur de 3% revient à la multiplier par $1 - \frac{3}{100} = 0,97$.
   Cela signifie que le nombre d'élèves u_n a été multiplié par $0,97$ pour obtenir le nombre d'élèves l'année suivante u_{n+1}, sans oublier d'y ajouter les 75 nouveaux élèves.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,97u_n + 75$.

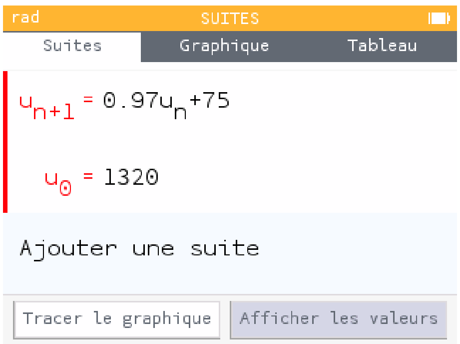
3. A l'aide d'un tableur, le maire de Clamart a calculé les huit premiers termes de la suite.
   Sur la capture d'écran ci-dessous, les valeurs affichées ont été arrondies à l'unité.

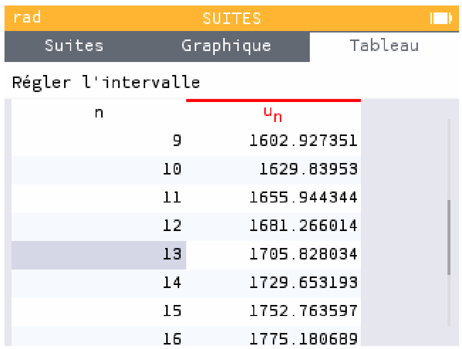
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u(n)	1320	1355	1390	1423	1455	1487	1517	1547

   (a) Quelle formule peut-on entrer en C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les premiers termes de la suite (u_n) ?
   =0,97*B2+75

   (b) La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
   Il faudrait utiliser les valeurs exactes pour les calculs mais on va se contenter d'utiliser les valeurs arrondies ici.
   $u_2 - u_1 = 1390 - 1355 = 35$ et $u_3 - u_2 = 1423 - 1390 = 33$.
   Les deux résultats sont différents donc la suite (u_n) ne peut pas être arithmétique.
   $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1390}{1355} \approx 1,026$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{1423}{1390} \approx 1,024$.
   Les deux résultats sont différents donc la suite (u_n) ne peut pas être géométrique.

4. Si ce rythme se poursuit, à partir de quelle année le lycée ne sera-t-il plus en mesure d'accueillir tous les élèves ? Expliquer la démarche utilisée.
   Pour déterminer à partir de quelle année le lycée ne sera plus en mesure d'accueillir tous les élèves, il faut déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 1750$. En entrant la suite à la calculatrice, on obtient le tableau suivant :





   On constate que c'est à partir de l'année de rang 13, c'est-à-dire en $2020 + 13 = 2033$ que le lycée ne sera plus en mesure d'accueillir tous les élèves.