Correction Devoir Surveillé N°2 (55min)

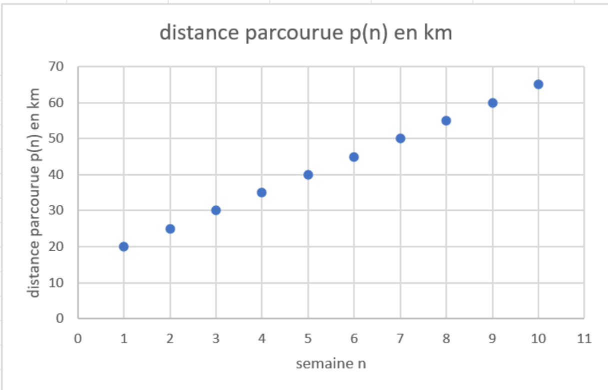
Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Entraînement sportif (14 points)

Pierre et Marie décident de s'entraîner à vélo afin d'améliorer leur forme physique. La première semaine, ils parcourent l'un comme l'autre 20 km, puis ils établissent chacun leur programme d'entraînement.

1. Dans son programme d'entraînement, Pierre décide d'augmenter la distance parcourue de 5km chaque semaine. Pierre suit ses progrès et la distance p_n qu'il parcourt la n-ième semaine à l'aide de la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	semaine n	distance parcourue p(n) en km	distance totale parcourue en km
2	1	20	20
3	2	25	45
4	3	30	75
5	4	35	...
6	5	40	
7	6	45	
8	7	50	
9	8	55	
10	9	60	
11	10	65	
12			
13			
14			



(a) On a $p_1 = 20$. Combien vaut p_2 ?
$p_1 = 20$ donc $\boxed{p_2 = 25}$.

(b) Représenter graphiquement la suite (p_n) dans le graphique ci-dessus.
Voir le graphique.

(c) Quelle formule Pierre doit-il saisir dans la cellule B3 du tableau, puis étirer vers le bas, pour calculer la distance qu'il doit parcourir chaque semaine ?
Dans la cellule B3, on doit saisir la formule $\boxed{\text{=B2+5}}$.

(d) Déterminer, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
Pour tout entier naturel n, $\boxed{p_{n+1} = p_n + 5}$.

(e) Combien de kilomètres devra parcourir Pierre la 18-ième semaine ?
Détailler votre calcul.
$p_{18} = p_1 + 5 + 5 + 5 + \ldots + 5 = 20 + 5 \times 17 = 105.$
Pierre devra parcourir $\boxed{105 \text{ km}}$ la 18-ième semaine.

(f) Pour impressionner les copains, Pierre aimerait enfin calculer chaque semaine le nombre total de kilomètres parcourus depuis le début de son entraînement.
Expliquer comment remplir efficacement la colonne C du tableur.
Dans la cellule C2, on écrit la valeur 20, puis on écrit dans la cellule C3 la formule =C2+B3.
Il faut ensuite étirer la formule vers le bas.

2. Dans son programme d'entraînement, Marie décide d'augmenter de 15% chaque semaine la distance parcourue. On note d_n la distance parcourue par Marie lors de la n-ième semaine.

(a) On a $d_1 = 20$. Combien vaut d_2 ?
$20 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 20 \times 1,15 = 23$ donc $\boxed{d_2 = 23}$.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence entre d_{n+1} et d_n.
Pour tout entier naturel n, $\boxed{d_{n+1} = d_n \times 1,15}$.

(c) Combien de kilomètres devra parcourir Marie la 18-ième semaine ?
Détailler votre calcul.
$d_{18} = 20 \times 1,15 \times 1,15 \times 1,15 \times \ldots \times 1,15 = 20 \times 1,15^{17} \approx 215.$
Marie devra parcourir $\boxed{215 \text{ km}}$ la 18-ième semaine.

(d) Marie décide d'afficher le nombre de kilomètres à parcourir dans son entraînement les 10 premières semaines à l'aide d'un algorithme Python. Compléter le programme suivant pour qu'il réponde au problème posé.

```
d=20
print(d)
for n in range(1,10):
    d=1.15*d
    print(d)
```

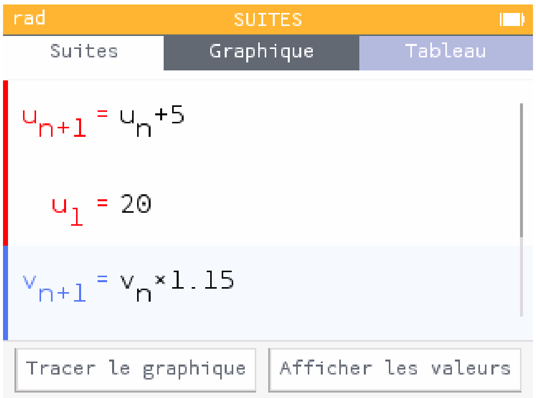
(e) En détaillant votre raisonnement, déterminer au bout de combien de semaines Marie parcourra une distance supérieure à celle de Pierre.

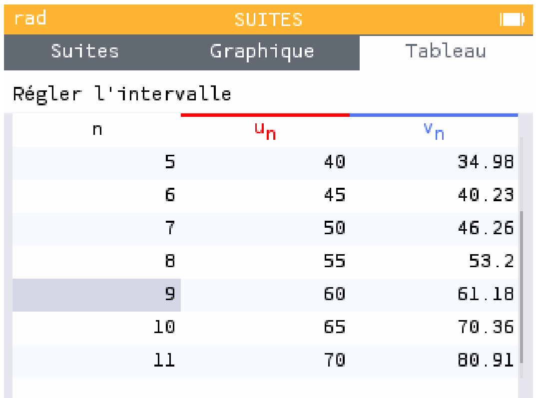
$p_1 = 20$
$p_2 = 20 + 5 \times 1 = 25$
$p_3 = 20 + 5 \times 2 = 30$
$p_4 = 20 + 5 \times 3 = 35$
$p_5 = 20 + 5 \times 4 = 40$
$p_6 = 20 + 5 \times 5 = 45$
$p_7 = 20 + 5 \times 6 = 50$
$p_8 = 20 + 5 \times 7 = 55$
$p_9 = 20 + 5 \times 8 = 60$

$d_1 = 20$
$d_2 = 20 \times 1,15^1 \approx 23$
$d_3 = 20 \times 1,15^2 \approx 26$
$d_4 = 20 \times 1,15^3 \approx 30$
$d_5 = 20 \times 1,15^4 \approx 35$
$d_6 = 20 \times 1,15^5 \approx 40$
$d_7 = 20 \times 1,15^6 \approx 46$
$d_8 = 20 \times 1,15^7 \approx 53$
$d_9 = 20 \times 1,15^8 \approx 61$

A partir de la 9ème semaine, Marie parcourra une distance supérieure à celle de Pierre.

On pouvait aussi trouver cette valeur en affichant les termes de ces deux suites directement à la calculatrice :





Exercice 2 - Calcul de termes (6 points)

Dans cet exercice, il faut détailler les calculs effectués.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n^2 + n + 5$.
Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
$u_0 = 2 \times 0^2 + 0 + 5 = 5$
$u_1 = 2 \times 1^2 + 1 + 5 = 8$
$u_2 = 2 \times 2^2 + 2 + 5 = 15$
$u_3 = 2 \times 3^2 + 3 + 5 = 26$

2. On considère la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n + 1 \end{cases}$$

(a) Calculer v_1, v_2 et v_3.
$v_1 = 3 \times v_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$
$v_2 = 3 \times v_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22$
$v_3 = 3 \times v_2 + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67$

(b) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de v_{13}.
A l'aide de la calculatrice, on trouve $v_{13} = 3985807$.

3. On considère la suite (w_n) définie par

$$\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n - 2n + 5 \end{cases}$$

Calculer w_1, w_2 et w_3.
$w_1 = w_{0+1} = w_0 - 2 \times 0 + 5 = -2 + 0 + 5 = 3$
$w_2 = w_{1+1} = w_1 - 2 \times 1 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$
$w_3 = w_{2+1} = w_2 - 2 \times 2 + 5 = 6 - 4 + 5 = 7$