

Exercice 1 - Multiples et diviseurs

Compléter les phrases suivantes avec *multiple* ou *diviseur* puis justifier votre réponse.

250 est un **multiple** de 50 car $250 = 50 \times 5$.

7 est un **diviseur** de 42 car $42 = 7 \times 6$.

21 est un **diviseur** de 2100 car $2100 = 21 \times 100$.

0 est un **multiple** de 15 car $0 = 15 \times 0$.

2019 est un **diviseur** de 0 car $0 = 2019 \times 0$.

37 est un **multiple/diviseur** de 37 car $37 = 37 \times 1$.

Exercice 2 - Le crible d'Eratosthène

Dans ce tableau, :

- éliminer 1,
- éliminer tous les multiples de 2 sauf 2,
- éliminer tous les multiples de 3 restants sauf 3,
- éliminer tous les multiples de 5 restants sauf 5,
- éliminer tous les multiples de 7 restants sauf 7.

Question : Quels nombres reste-t-il ?

Il ne reste que les nombres premiers inférieurs à 50.

X	2	3	X	5	X	7	X	X	X
11	X	13	X	X	X	17	X	19	X
X	X	23	X	X	X	X	X	29	X
31	X	X	X	X	X	37	X	X	X
41	X	43	X	X	X	47	X	X	X

Exercice 3 - Le labyrinthe

Tracer le chemin pour aller de 1 à 180 sachant qu'on peut monter vers une brique qui contient un multiple ou descendre vers une brique qui contient un diviseur, et qu'on ne peut pas se déplacer à l'horizontal.

Exemple : on peut aller de 180 à 60 et de 2 à 56 mais pas de 20 à 90 ou de 45 à 56.

	180	405	270	108	168	252	945	
60	90	135	54	126	84	126	189	
	20	45	25	2	42	18	63	
10	56	15	300	300	14	42	9	
	2	28	3	60	120	7	6	
21	14	42	12	30	45	3	4	
	7	6	3	5	15	9	1	

Exercice 4 - Nombres croisés

Horizontalement

A - Multiple de 3 et de 5. • Diviseur de 25.

B - Multiple de 10. • Diviseur de tous les nombres.

C - Diviseur de 222 autre que lui-même.

D - Multiple de 5 (mais pas de 10) si on lui ajoute 1. • Multiple de 12 et de 7.

Verticalement

1 - Nombre palindrome

2 - Multiple de 100 si on lui enlève 1.

3 - Multiple de 2 et de 3.

4 - Multiple de 17.

	1	2	3	4
A	4	5		5
B	1	0		1
C	1	1	1	
D	4		8	4

Exercice 5 - Critères de divisibilité

Dans chacun des cas suivants, déterminer, en justifiant, les chiffres a , b , c et d tels que :

1. $23a4$ est divisible par 3.

2. $621b$ est divisible par 4.

3. $23c5d$ est divisible par 3 et par 5.

1. $23a4$ est divisible par 3 $\iff 2 + 3 + a + 4$ est divisible par 3

$\iff 9 + a$ est divisible par 3

$\iff a = 0$ ou $a = 3$ ou $a = 6$ ou $a = 9$

2. $621b$ est divisible par 4 $\iff 1b$ est divisible par 4

$\iff b = 2$ ou $b = 6$

3. Tout d'abord,

$23c5d$ est divisible par 5 $\iff d = 0$ ou $d = 5$

Traitons maintenant chaque cas à part.

Cas où $d = 0$:

$23c50$ est divisible par 3 $\iff 2 + 3 + c + 5 + 0$ est divisible par 3

$\iff 10 + c$ est divisible par 3

$\iff c = 2$ ou $c = 5$ ou $c = 8$

Cas où $d = 5$:

$$\begin{aligned}23c55 \text{ est divisible par } 3 &\iff 2 + 3 + c + 5 + 5 \text{ est divisible par } 3 \\&\iff 15 + c \text{ est divisible par } 3 \\&\iff c = 0 \text{ ou } c = 3 \text{ ou } c = 6 \text{ ou } c = 9\end{aligned}$$

En conclusion, les couples $(c; d)$ solutions sont :

$$(2; 0); (5; 0); (8; 0); (0; 5); (3; 5); (6; 5); (8; 5)$$

Exercice 6 - Nombres premiers

1. Donner la définition d'un nombre premier.

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs entiers positifs : 1 et lui-même.

2. Décomposer en produit de nombres premiers 1260 et 3080.

$$1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

$$3080 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 = 2^3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

3. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{1260}{3080}$.

On a donc :

$$\frac{1260}{3080} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7}{2^3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{3^2}{2 \times 11} = \frac{9}{22}$$

Exercice 7 - Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Méthode : Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver UN SEUL contre-exemple.

1. **Affirmation 1 :** La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

VRAI

Soit $k \in \mathbb{Z}$ le plus petit des trois entiers. Les deux entiers consécutifs sont donc $k + 1$ et $k + 2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}k + (k + 1) + (k + 2) &= 3k + 3 \\&= 3(k + 1) \\&= 3K \quad \text{où } K = k + 1 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

En conclusion, la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

2. **Affirmation 2 :** La somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4.

FAUX

On va utiliser un contre-exemple. En effet, on a par exemple $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et 10 n'est pas divisible par 4.

Par conséquent, la somme de quatre entiers consécutifs n'est pas toujours un multiple de 4.

3. **Affirmation 3 :** Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.

FAUX

On va utiliser un contre-exemple.

Il suffit de prendre le nombre 4 et remarquer que ses diviseurs sont 1, 2 et 4. Il a donc trois diviseurs.

4. **Affirmation 4 :** Le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

VRAI

Soit m un multiple de 4 et n un multiple de 6. Alors il existe deux entiers k et l tels que

$$m = 4k \quad \text{et} \quad n = 6l$$

Ainsi, on obtient

$$m \times n = 4k \times 6l = 24 \times kl = 24K \text{ avec } K \in \mathbb{Z}$$

En conclusion, le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

5. **Affirmation 5 :** Tous les nombres impairs sont premiers.

FAUX

On va utiliser un contre-exemple.

15 est un nombre impair mais il n'est pas premier car $15 = 5 \times 3$.

Exercice 8 - Démonstrations

1. Démontrer que la somme de deux multiples de 13 est aussi un multiple de 13.

Soit a et b deux multiples de 13.

Comme a est un multiple de 13, il existe un entier k_1 tel que $a = 13k_1$

Comme b est un multiple de 13, il existe un entier k_2 tel que $b = 13k_2$

On a alors $a + b = 13k_1 + 13k_2 = 13(k_1 + k_2) = 13k$, où $k = k_1 + k_2$.

$k = k_1 + k_2$ est un entier car c'est la somme de deux entiers, donc $a + b = 13k$ avec k entier.

On en déduit que $a + b$ est un multiple de 13.

2. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Soit a et b deux nombres impairs.

Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}a + b &= (2k + 1) + (2k' + 1) \\&= 2k + 2k' + 2 \\&= 2(k + k' + 1) \\&= 2k'' \quad \text{où } k'' = k + k' + 1 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

On en déduit que $a + b$ est un nombre pair.

3. Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Soit n un nombre impair.

Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}n^2 &= (2k + 1)^2 \\&= 4k^2 + 4k + 1 \\&= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\&= 2k' + 1 \quad \text{où } k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

On en déduit que n^2 est un nombre impair.

4. Démontrer que si a est un entier, alors $a^2 - a$ est un nombre pair.

Ici, pour démontrer cette proposition, on doit raisonner par disjonction de cas.

On va démontrer cette propriété pour les entiers pairs d'une part, et les entiers impairs d'autre part. Ainsi, puisque les entiers pairs et impairs forment tous les entiers, on aura démontré la proposition pour tous les entiers. Allons-y !

Cas n°1 : a est un entier pair

Puisque a est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$.

On a alors :

$$\begin{aligned}a^2 - a &= (2k)^2 - 2k \\&= 4k^2 - 2k \\&= 2(2k^2 - k) \\&= 2k' \quad \text{où } k' = 2k^2 - k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

On en déduit que $a^2 - a$ est un nombre pair.

Cas n°2 : a est un entier impair

Puisque a est impair, il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}a^2 - a &= (2k + 1)^2 - (2k + 1) \\&= (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 - 2k - 1 \\&= 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1 \\&= 4k^2 + 2k \\&= 2(2k^2 + k) \\&= 2k' \quad \text{où } k' = 2k^2 + k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

On en déduit que $a^2 - a$ est un nombre pair.

Par conséquent, nous avons montré, par disjonction de cas, que si a est un entier, alors $a^2 - a$ est un nombre pair.