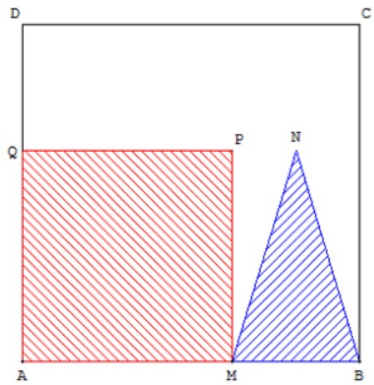
Exercice 1

Deux nombres entiers naturels consécutifs ont des carrés dont la différence est égale à 953.
Quels sont ces nombres ?
Soit x le plus petit de ces deux nombres.
D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2 - x^2 = 953\\
&x^2 + 2x + 1 - x^2 = 953\\
&2x = 952\\
&x = 476
\end{aligned}$$

Par conséquent, ces deux nombres sont 476 et 477.

Exercice 2



Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 8cm.
M est un point quelconque du segment $[AB]$.
On dessine comme ci-dessus dans le carré $ABCD$ un carré de côté $[AM]$ et un triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.

Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?

On cherche la position du point M sur le segment $[AB]$ de façon à obtenir un triangle et un carré avec des aires égales.
On pose $x = AM$. On a alors $MB = 8 - x$ et alors :

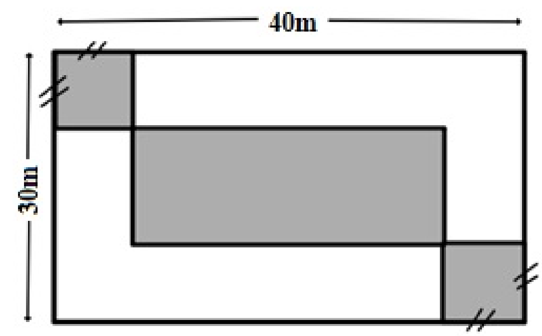
$$\mathcal{A}_{carre} = AM \times MQ = x \times x \qquad \mathcal{A}_{triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{MB \times AQ}{2} = \frac{x \times (8-x)}{2}$$

On résout alors l'équation :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{carre} = \mathcal{A}_{triangle}\\
\iff\ & x^2 = \frac{x \times (8-x)}{2}\\
\iff\ & x^2 = \frac{8x - x^2}{2}\\
\iff\ & 2 \times x^2 = 8x - x^2\\
\iff\ & 3x^2 - 8x = 0\\
\iff\ & x(3x-8) = 0\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 8 = 0\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Les deux aires sont donc égales lorsque $AM = 0$ cm ou $AM = \frac{8}{3}$ cm.

Exercice 3



Sur le terrain ci-contre, on veut créer une partie « pelouse » (en blanc) et une partie « fleurs » (en gris).
Cette dernière doit être constituée de deux carrés de même taille (aux extrémités) et un rectangle.

On appelle x la longueur (en m) des côtés des deux carrés gris.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?
   x peut varier entre 0m et 15m.
2. Montrer que l'aire grise G (en m^2) est donnée par la fonction $G(x) = 6x^2 - 140x + 1200$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathscr{A}_{carre} + \mathscr{A}_{carre} + \mathscr{A}_{rectangle} \\ &= x^2 + x^2 + (40 - 2x) \times (30 - 2x) \\ &= x^2 + x^2 + 1200 - 80x - 60x + 4x^2 \\ &= 6x^2 - 140x + 1200 \end{aligned}$$

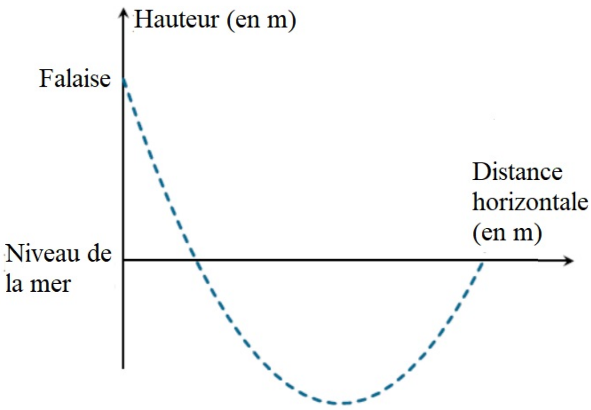
3. Donner la valeur exacte de l'aire grise lorsque $x = 3,5$.
   $G(3,5) = 6 \times 3,5^2 - 140 \times 3,5 + 1200 = 783,5$
   Lorsque $x = 3,5$ m, l'aire de la partie en fleurs est de $783,5$ m^2.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer pour quelle valeur de x (à 0,1 m près) l'aire grise est minimale.
   Quelle est la valeur de cette aire minimale ?
   En traçant la fonction G à la calculatrice avec les réglages proposés, on trouve qu'elle admet un minimum pour $x \approx 11,7$ m et l'aire de la partie en fleurs est alors de $383,34$ m^2.

Exercice 4

Le fou de Bassan est un oiseau qui se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis les falaises de l'île de Bass.

Soit $h(x)$ la hauteur de l'oiseau au dessus du niveau de l'eau en fonction de la distance x, à l'horizontale, le séparant de la rive.

L'oiseau décrit une parabole représentative de la fonction définie par $\boxed{h(x) = x^2 - 6x + 5}$ pour x appartenant à $[0; 6]$.



1. À quelle hauteur l'oiseau commence-t-il son plongeon ? Justifier.
   L'oiseau commence son plongeon sur la falaise, soit en $x = 0$.
   Or $h(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5$, donc l'oiseau commence son plongeon à 5 mètres de hauteur.
2. En s'aidant de la calculatrice, déterminer le tableau de variation complet de la fonction h sur $[0; 6]$.

x	0	3	6
Variations de h	5 ↘	-4	↗ 5

3. Montrer que $h(x) = (x-3)^2 - 4$

$$\begin{aligned} (x-3)^2 - 4 &= x^2 - 6x + 9 - 4 \\ &= x^2 - 6x + 5 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

   On a bien prouvé l'égalité.
4. Écrire l'équation qui détermine à quelles distances du rivage l'oiseau est entré puis sorti de l'eau.
   Résoudre cette équation.
   Trouver les distances pour lesquelles l'oiseau entre et sort de l'eau revient à déterminer les solutions de l'équation

$h(x) = 0$, c'est-à-dire les distances pour lesquelles la hauteur de l'oiseau est nulle.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff (x-3)^2 - 4 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 - 2^2 = 0 \\ &\iff ((x-3)-2) \times ((x-3)+2) = 0 \\ &\iff (x-5)(x-1) = 0 \\ &\iff x-5 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x-1 = 0 \\ &\iff x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = 1 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc 1 et 5, l'oiseau rentre donc dans l'eau à 1 mètre du rivage et en ressort à 5 mètres du rivage.

5. Déterminer à quelle distance du rivage était l'oiseau lorsqu'il se situait à 4 mètres de profondeur.
Cela revient à résoudre l'équation $h(x) = -4$.

$$\begin{aligned} & h(x) = -4 \\ \iff & (x-3)^2 - 4 = -4 \\ \iff & (x-3)^2 = 0 \\ \iff & x - 3 = 0 \\ \iff & x = 3 \end{aligned}$$

L'oiseau se situe à 4 mètre de profondeur lorsqu'il est à 3 mètres du rivage.