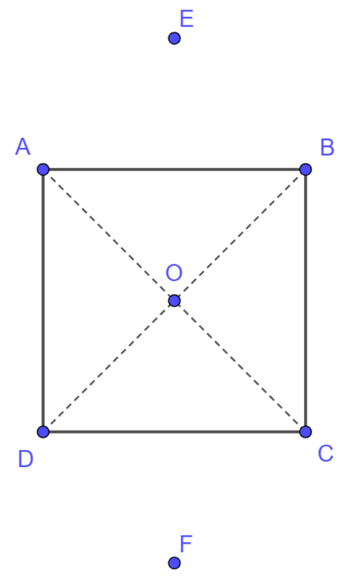
Table des matières

1 Feuille d'exercices n°2

Exercice 3



1. Voir figure.
2. Voir figure.
3. D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{EB}$ donc $AOBE$ est un parallélogramme.
   On en déduit donc que $\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}}$.
   D'après l'énoncé, $[OC]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu donc $OBCF$ est un parallélogramme. On en déduit donc que $\boxed{\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}}$.
4. D'après la question précédente, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$.
   Par conséquent, $AECF$ est un parallélogramme.
   Les diagonales de ce parallélogramme sont $[AC]$ et $[EF]$ et elles se coupent en leur milieu. Enfin, comme O est le milieu de $[AC]$, on en déduit donc que $\boxed{O \text{ est le milieu de } [EF]}$.

Exercice 4

1.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 4-4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ donc $\boxed{ABCD \text{ n'est pas un parallélogramme}}$.

2.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-4) \\ 3-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$.

3.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-1 \\ -\frac{5}{3}-(-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ donc $\boxed{ABCD \text{ n'est pas un parallélogramme}}$.

Exercice 5

1. Dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$, on a :

$$A(0;1) \quad B(1;1) \quad C(1;0) \quad D(0;0) \quad E(-2;0) \quad F(-2;-2) \quad G(0;-2) \quad H(-1;-1)$$

2.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

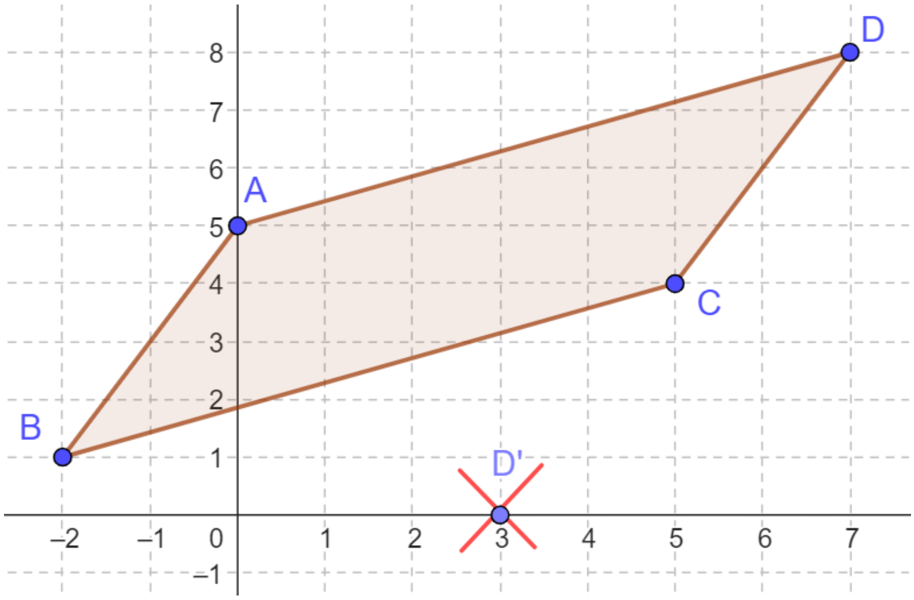
$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ -1-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EH}$ donc $\boxed{ACHE \text{ est un parallélogramme}}$.

Exercice 6

$$\begin{aligned}
ABCD \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\
&\iff \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2 - 0 = 5 - x_D \\ 1 - 5 = 4 - y_D \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -7 = -x_D \\ -8 = -y_D \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point D a pour coordonnées $\boxed{D(7;8)}$.



Le point D n'a pas pour coordonnées $D(3;0)$ car le parallélogramme s'appellerait alors $ABDC$ et pas $ABCD$. C'est une erreur d'étourderie classique à éviter !

2 Feuille d'exercices n°4

Exercice 5

D'après la relation de Chasles,

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 6

1. (a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CD} && \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{BA} && \text{car } ABCD \text{ est un carré} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} && \text{car } K \text{ est le milieu de } [BC]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EK} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BK} && \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} && \text{car } K \text{ est le milieu de } [BC]
\end{aligned}$$

2. (a) E est le symétrique de A par rapport à B donc $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA} \\
\text{donc} \quad & \overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
\text{donc} \quad & \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{EK}
\end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{EK}$ donc K est le milieu du segment $[ED]$.

Exercice 7

1. Soit $H(x_H, y_H)$ le point recherché.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AC} \quad &\iff \left\{\begin{array}{l} x_H - x_A + x_H - x_B = x_C - x_A \\ y_H - y_A + y_H - y_B = y_C - y_A \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x_H - 1 + x_H - 0 = 5 - 1 \\ y_H - 3 + y_H - 4 = 0 - 3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2x_H = 5 \\ 2y_H = 4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x_H = \frac{5}{2} \\ y_H = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le point H a pour coordonnées $\boxed{H\left(\frac{5}{2}; 2\right)}$.

2. Soit $M(x_M, y_M)$ le point recherché.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0} &\iff \begin{cases} x_A - x_M + x_B - x_M + x_C - x_M = 0 \\ y_A - y_M + y_B - y_M + y_C - y_M = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 - x_M + 0 - x_M + 5 - x_M = 0 \\ 3 - y_M + 4 - y_M + 0 - y_M = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x_M + 6 = 0 \\ -3y_M + 7 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x_M = 6 \\ 3y_M = 7 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = \frac{7}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point M a pour coordonnées $\boxed{M\left(2; \dfrac{7}{3}\right)}$.

Exercice 8

1.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4-(-3) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2\times(-1) \\ 2\times 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

2.

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5-(-4) \\ -3-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} x_A - x_D \\ y_A - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -3-2 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ a donc pour coordonnées :

$$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3\times 9 - 5 \\ -3\times(-5)+0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -32 \\ 15 \end{pmatrix}}$$

3.

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -3-(-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -3-5 \\ -1-(-3) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}-4\overrightarrow{CA}$ a donc pour coordonnées :

$$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1+2\times 3-4\times(-8) \\ 3+2\times(-2)-4\times 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 37 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

3 Exercices du manuel

61 page 217

1.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(9-6)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \\ BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-9)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-6)^2+3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \\ CA &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{3^2+(-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} \end{aligned}$$

$AB = BC$ donc $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est isocèle en } B}$.

Mais on ne s'arrête pas là, on vérifie aussi si le triangle ABC est rectangle ou non.

$[CA]$ est le plus grand côté.
D'une part, $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{45}\right)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 45 + 45 = 90$.
D'autre part, $CA^2 = \left(\sqrt{90}\right)^2 = 90$.
On a donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } B}$.

2.

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\iff \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 9 - 6 = 3 - x_D \\ 2 - (-4) = 5 - y_D \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3 = 3 - x_D \\ 6 = 5 - y_D \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le point D a pour coordonnées $\boxed{D(0;-1)}$.

3. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme qui possède :

- un angle droit car le triangle ABC est rectangle en B
- deux côtés consécutifs de même longueur car $AB = BC$

donc $\boxed{ABCD \text{ est un carré}}$.