Chapitre 4 : Fonctions affines

1. Définitions et exemples

Définition 1.
Une **fonction affine** f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + p$$

- Le coefficient m est le **coefficient directeur**.
- Le coefficient p est l'**ordonnée à l'origine**.

Cas particuliers :
Si $p = 0$, la fonction $x \mapsto mx$ est **linéaire**.
Si $m = 0$, la fonction $x \mapsto p$ est **constante**.

Exemple 1.

① La fonction $x \mapsto 2x - 8$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

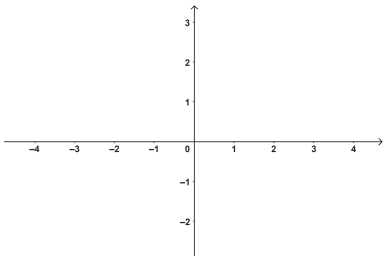
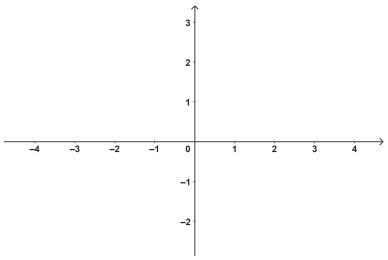
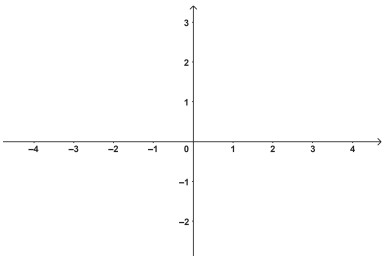
② La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

③ La fonction $x \mapsto \frac{x}{3} - \pi$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

2. Représentation graphique

Propriété 1.

On se place dans un repère du plan. On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- La courbe représentative de cette fonction affine est une **droite** d'équation $y = mx + p$.
- L'ordonnée à l'origine p se lit facilement sur l'axe des ordonnées.
  C'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de cet axe. C'est l'image de 0 par f puisque $f(0) = p$.
- Cas particulier : La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Théorème 2.

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts x_1 et x_2, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m \qquad \text{avec} \qquad A(x_1; f(x_1)) \text{ et } B(x_2; f(x_2))$$

Exemple 2.

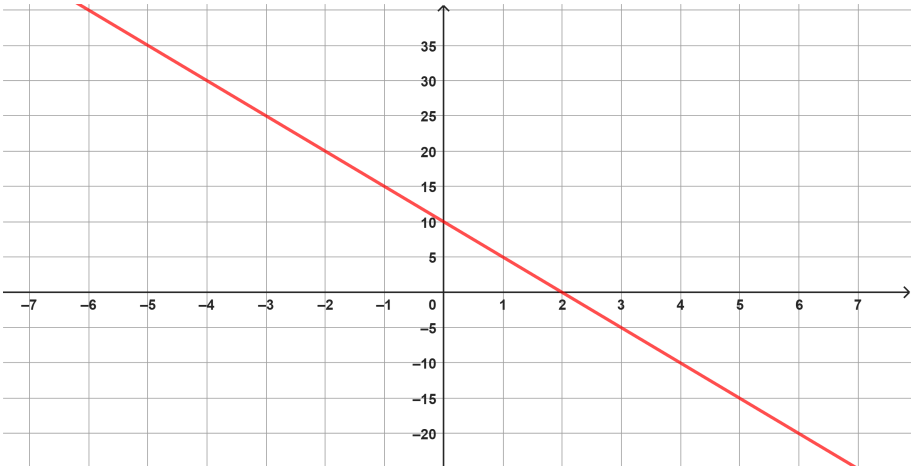
Déterminer par le calcul une fonction affine (il faut deux valeurs)

Deux façons de poser la même question :

- Déterminer la fonction affine f telle que $\begin{cases} f(-6) = 5 \\ f(3) = -1 \end{cases}$
- Déterminer la fonction affine f dont la courbe est une droite passant par $\begin{cases} A(-6;5) \\ B(3;-1) \end{cases}$

Exemple 3.

Déterminer graphiquement une fonction affine



Exemple 4.

Cuicui le petit oiseau se promène dans Clamart en suivant une trajectoire qu'on suppose rectiligne.
On a relevé les coordonnées de deux points de passage de Cuicui :





1er point de passage : $A\,(15\,;\,29)$
$2^{\text{ème}}$ point de passage : $B\,(5\,;\,33)$

Dans ce même repère, un lampadaire a pour coordonnées $L\,(52\,;\,14,2)$.
Cuicui est-il en danger ?

La droite (AB) est la représentation graphique d'une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
$A(15;29) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(15) = 29$.
$B(5;33) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(5) = 33$.

$$m = \frac{f(5) - f(15)}{5 - 15} = \frac{33 - 29}{5 - 15} = -\frac{2}{5}$$

Ainsi,

$$f(x) = -\frac{2}{5}x + p$$

Or, $f(15) = 29$ donc

$$\begin{aligned} f(15) = 29 &\iff -\frac{2}{5} \times 15 + p = 29 \\ &\iff -6 + p = 29 \\ &\iff p = 35 \end{aligned}$$

En conclusion, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 35$.

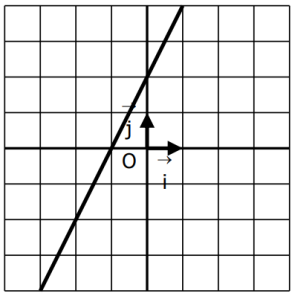
On cherche à déterminer si le lampadaire est sur la trajectoire de Cuicui.

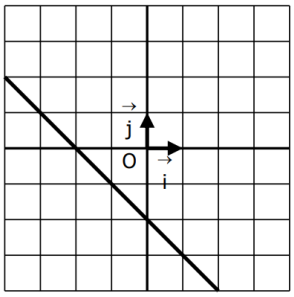
$$f(x_L) = f(52) = -\frac{2}{5} \times 52 + 35 = 14,2 = y_L$$

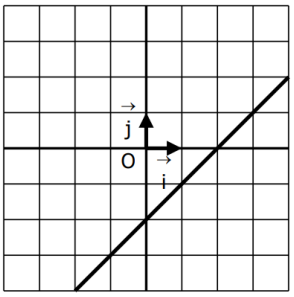
On en déduit que le point L appartient à la droite (AB).
Le lampadaire est donc sur la trajectoire de l'oiseau, attention Cuicui !

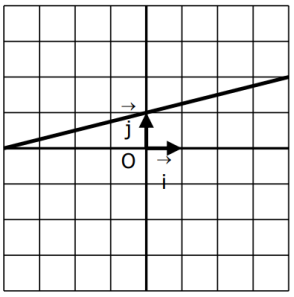
Exemple 5.

Déterminer graphiquement l'expression de la fonction affine dont on a tracé la courbe :







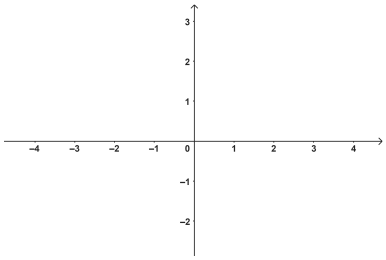
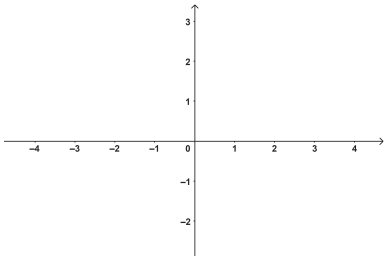
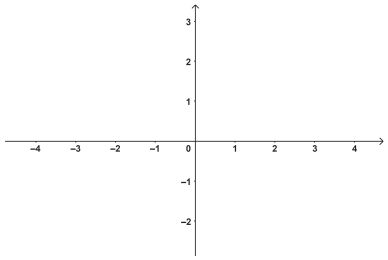


Propriété 3.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et :

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad mx + p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{p}{m}$$

La solution de cette équation correspond à l'abscisse du point d'intersection A de la droite associée à la fonction affine et de l'axe des abscisses. Ses coordonnées sont $A\left(0\,;-\frac{p}{m}\right)$

3. Étude des variations d'une fonction affine

Théorème 4.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6.

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 7$.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$.

③ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4 - x$.

4. Étude du signe d'une fonction affine

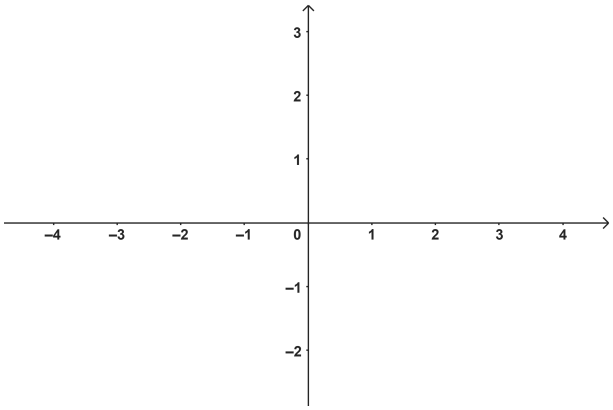
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Cas n°1 : $m = 0$

Dans le cas où $m = 0$, $f(x) = p$ donc f est une fonction constante du même signe que p.

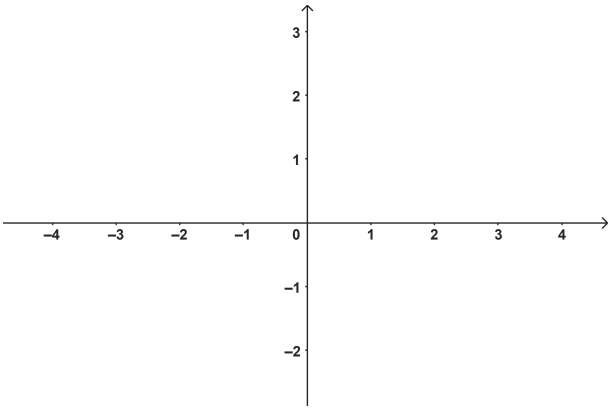
Cas n°2 : $m > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$-$	0	$+$	



Cas n°3 : $m < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$+$	0	$-$	



Exemple 7.

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
   (a) Déterminer le tableau de signes de la fonction f.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - 3x$.
   (a) Déterminer le tableau de signes de la fonction g.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-contre.

