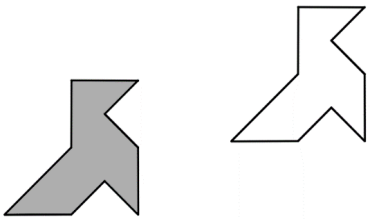
Chapitre 3 : Vecteurs

1. Généralités sur les vecteurs

1. 1. Vecteur et translation

Dans l'activité 1, nous avons découvert un nouveau déplacement : **la translation**.
Déplacer une figure par translation c'est faire glisser cette figure sans la faire tourner, ni en modifier les dimensions.



La translation qui transforme A en B est appelée

Définition 1.
Soit A et B deux points distincts du plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

-
-
-

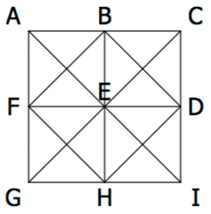


Il ne faut pas confondre direction et sens : la direction est donnée par la droite qui porte le vecteur mais sur cette droite il y a deux sens possibles !
On parle de direction Paris-Bordeaux mais on peut aller de Bordeaux à Paris ou de Paris à Bordeaux.

1. 2. Vecteurs égaux et parallélogramme

Définition 2.
Deux vecteurs ayant la même direction, le même sens et la même longueur sont dits **égaux**.

Exemple 1.



Propriété 1.

Soit A, B, C et D quatre points.
$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Remarque 1.

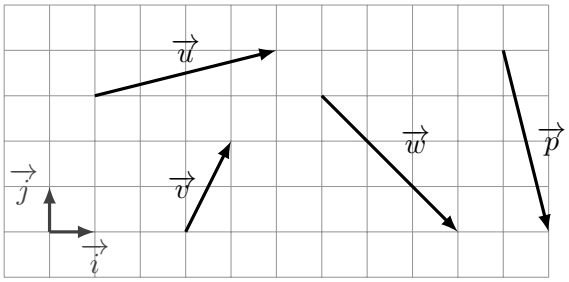
Deux vecteurs particuliers :

- La translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, c'est-à-dire qui transforme le point A en lui-même, est appelée **vecteur nul** est est noté $\overrightarrow{0}$.
- On appelle **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$: il a la même direction, la même norme, mais un sens opposé. On note $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

2. Coordonnées d'un vecteur

Définition 3.
Soit O un point et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
• On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** du plan et que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé** du plan.
• Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple 2.

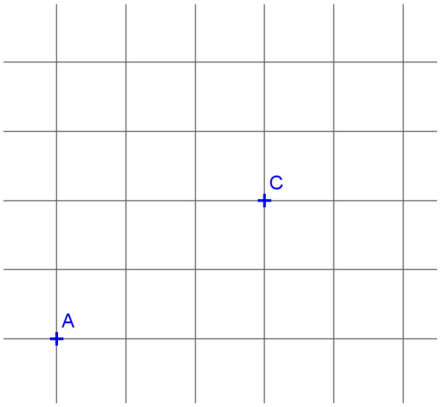


Exemple 3.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

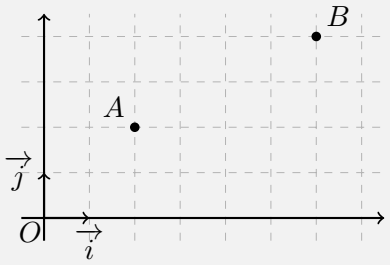
$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$



Propriété 2. (Coordonnées d'un vecteur)
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère du plan.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

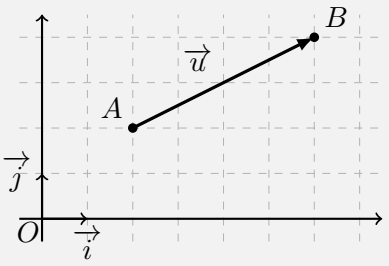


Exemple 4.
On considère les points $A(-3; 1)$, $B(4; 4)$ et $C(2; -2)$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Propriété 3. (Norme d'un vecteur)

Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Remarque 2.

Exemple 5.

Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Corollaire 4.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale :

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarque 3.

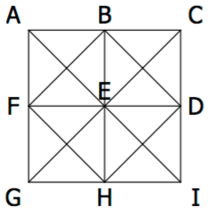
Exemple 6.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2; -2)$, $B(6; -1)$ et $C(4; 7)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

3. Somme de deux vecteurs

Définition 4.
On appelle $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ le vecteur définissant la translation obtenue après une translation vecteur $\overrightarrow{u}$ et une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Concrètement, le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ s'obtient en « mettant bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple 7.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=$ $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{GE}=$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GE}=$

$\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GF}=$ $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=$ $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DH}=$

Propriété 5. (Coordonnées d'une somme)

Soit $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ une base du plan. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exemple 8.

Propriété 6. (Relation de Chasles)

Soit A, B et C trois points du plan. Alors,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Exemple 9.

$\overrightarrow{\ldots E}+\overrightarrow{E\ldots}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{O\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{\ldots P}$ $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{\ldots M}=\overrightarrow{AG}$

Exemple 10.
Soit A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Remarque 4.

4. Produit d'un vecteur par un nombre réel

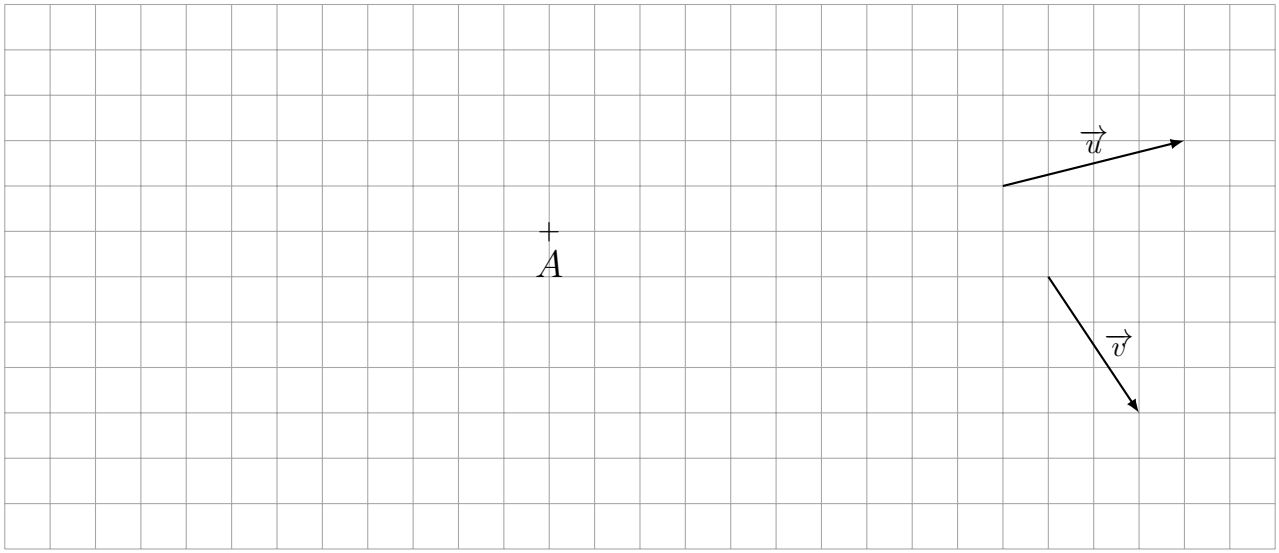
Définition 5.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et k un réel. On définit le vecteur $k\overrightarrow{u}$ de la façon suivante :

① si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

② si $k \neq 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que $\overrightarrow{u}$,
- le même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$,
- une norme égale à $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Exemple 11.
Représenter sur la figure les vecteurs $-3\overrightarrow{u}$, $2\overrightarrow{v}$, $1,5\overrightarrow{u}$ et $-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ en prenant à chaque fois A comme origine.



Propriété 7.

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. On considère un réel k et un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété 8. (Distributivité)

- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

Exemple 12. Simplifier les expressions suivantes

$\overrightarrow{w} = 3(\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) + 4\overrightarrow{u} + 6\overrightarrow{v}$ $\qquad$ $\overrightarrow{z} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$