Exercices en vrac sur tout le programme

Exercice 1 – Généralités sur les fonctions

Corrigé fait en classe

Exercice 2 – Modélisation

1. Pour que la figure soit possible, on a $x \in [0;8]$.

2. $S(x) = \mathscr{A}_{AMIJ} + \mathscr{A}_{CKIH}$
$= AJ \times AM + IH \times HC$
$= x \times x + (8-x) \times (10-x)$

3. $S(x) = x^2 + (8-x) \times (10-x)$
$= x^2 + 80 - 8x - 10x + x^2$
$= 2x^2 - 18x + 80$

4. **(a)** On cherche la valeur de x pour laquelle l'aire $S(x)$ est égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$, c'est-à-dire $\dfrac{8 \times 10}{2} = 40$.
On cherche donc à résoudre l'équation $S(x) = 40$.

(b) $S(x) = 40 \iff 2x^2 - 18x + 80 = 40 \iff 2x^2 - 18x + 40 = 0 \iff x^2 - 9x + 20 = 0$
(A la fin, on a divisé les deux termes de l'équation par 2)

(c) $(x-4)(x-5) = x^2 - 4x - 5x + 20 = x^2 - 9x + 20$

(d) Résolvons l'équation $S(x) = 40$.

$$\begin{array}{lcll} S(x) = 40 & \iff & x^2 - 9x + 20 = 0 & \text{d'après la question } \mathbf{4.(b)} \\ & \iff & (x-4)(x-5) = 0 & \text{d'après la question } \mathbf{4.(c)} \\ & \iff & x - 4 = 0 \text{ ou } x - 5 = 0 & \\ & \iff & x = 4 \text{ ou } x = 5 & \end{array}$$

En conclusion, la somme des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$ est égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$ lorsque $x = 4$ ou $x = 5$.

Exercice 3 – Calcul

1) $A = 3x(x+2) - (2x+1) = 3x^2 + 6x - 2x - 1 = 3x^2 + 4x - 1$.

2) $f(2) = (2\times2+1)(2\times2-4) + 3(2+1) = 5\times0 + 3\times3 = 0 + 9 = 9$.

3) On développe : $(2x+3)(5x-4) - 5(3x-2) = 10x^2 - 8x + 15x - 12 - 15x + 10 = 10x^2 - 8x - 2$.
On en déduit que l'égalité $(2x+3)(5x-4) - 5(3x-2) = 10x^2 - 8x - 2$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) a) $(x+3)^2 = x^2 + 2\times x\times3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
b) $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\times2x\times1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$.
c) $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$.

5) a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\times x\times3 + 3^2 = (x-3)^2$.
b) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2 = (5x-6)(5x+6)$.
c) $9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2\times3x\times4 + 4^2 = (3x+4)^2$.

6) $E = 4\sqrt{2} - \sqrt{98} + 3\sqrt{18} = 4\sqrt{2} - \sqrt{49\times2} + 3\sqrt{9\times2} = 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 3\times3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Exercice 4 – Fonctions carré et cube

1) L'image de $-\dfrac{4}{3}$ par la fonction carré est égale à $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

2) L'image de -2 par la fonction cube est égale à $(-2)^3 = -8$.

3) a) Puisque $3{,}4 > \dfrac{2}{5}$, on a $(3{,}4)^3 > \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ car la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

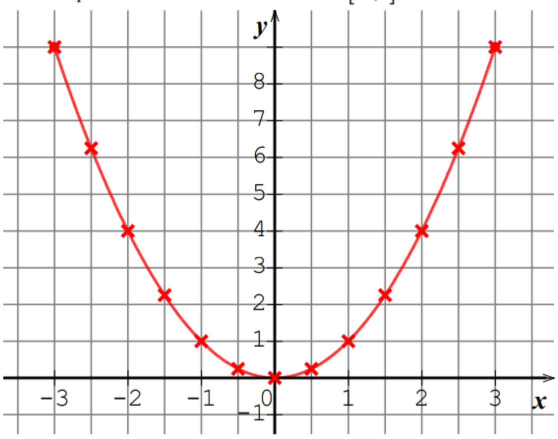
b) Puisque $-0{,}115 > -\dfrac{3}{5}$, on a $(-0{,}115)^2 < \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$ car la fonction carré est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$.

4) Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine O du repère, on dit que la fonction cube est impaire.

5) Tableau de valeurs.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

6) Courbe représentative de la fonction carré sur $[-3;3]$.



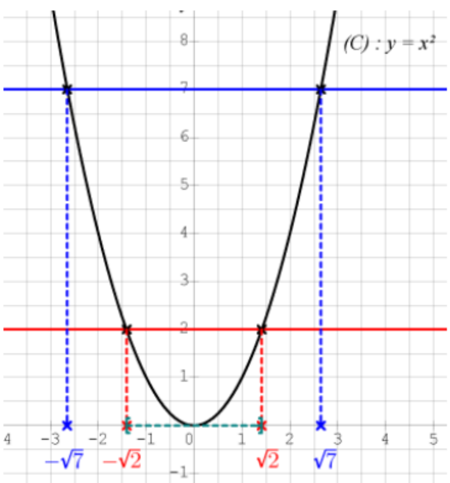
7) a) Equation $x^2 = 7$. $S = \left\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\right\}$. (Voir graphique n°1)

b) Equation $x^2 = -3$ Pas de solution car un carré est toujours positif ou nul.

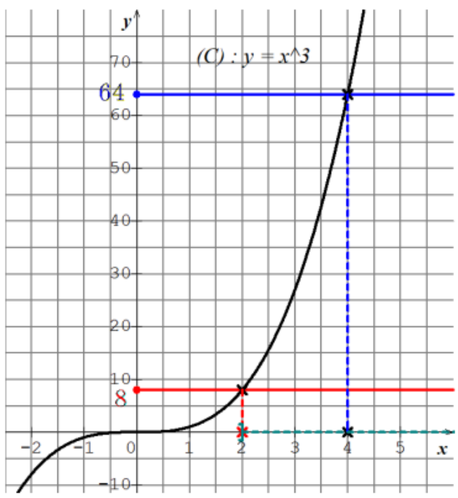
c) Equation $x^3 = 64$ $S = \{4\}$. (Voir graphique n°2)

d) Equation $x^2 \leq 2$ $S = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. (Voir graphique n°1)

e) Inéquation $x^3 > 8$ $S = \left]2;+\infty\right[$. (Voir graphique n°2)



Graphique n°1



Graphique n°2

Exercice 5 – Pourcentages

1) $\frac{144}{320}=0,45=45\%$ des élèves de première générale ont pris l'option Mathématiques.

2) $79\%\times 59200=0,79\times 59200=46768$ personnes sont présentes dans le stade.

3) $40\%\times 6\%=0,4\times 0,06=0,024=2,4\%$ des pompiers de cette ville sont de femmes de moins de 20 ans.

4) On note $V_1=22750$ et $V_2=56875$.

a) Le taux d'évolution est $t=\frac{V_2-V_1}{V_1}=\frac{56875-22750}{22750}=\frac{34125}{22750}=1,5=150\%$.

Entre 2021 et 2022, le nombre de clients a augmenté de 150%.

b) Le coefficient multiplicateur est $c=1+t=1+1,5=2,5$.

Ou $c=\frac{V_2}{V_1}=\frac{56875}{22750}=2,5$.

Entre 2021 et 2022, le nombre de clients a été multiplié par 2,5.

5) On note $V_1=1000$ habitants en 2015 ; V_2 et V_3 les nombres d'habitants respectivement en 2016, et 2017.

a) Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 20% est $c_1=1+t_1=1+\frac{20}{100}=1,2$.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 15% est $c_2=1+t_2=1-\frac{15}{100}=0,85$.

Le coefficient multiplicateur global est $C_{global}=c_1\times c_2=1,2\times 0,85=1,02$.

Le taux d'évolution global est $T_{global}=C_{global}-1=1,02-1=0,02=2\%$.

Entre 2015 et 2017, la population du village a augmenté de 2%.

b) $V_3=C_{global}\times V_1=1,02\times 1000=1020$ habitants en 2017.

6) On calcule le taux d'évolution réciproque du taux d'évolution 9%.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 9% est $c=1+t=1+\frac{9}{100}=1,09$.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $C_{réciproque}=\frac{1}{c}=\frac{1}{1,09}$.

Le taux d'évolution réciproque est $T_{réciproque}=C_{réciproque}-1=\frac{1}{1,09}-1\approx -0,083=-8,3\%$.

Pour retrouver le prix de départ de la baguette, il faut diminuer le nouveau prix d'environ 8,3%.

Exercice 6 – Fonctions affines

Partie A

L'ordonnée à l'origine de f est 60 et son coefficient directeur est -10. Donc la droite représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 60)$. Et en partant de ce point, lorsqu'on se décale d'une unité vers la droite, on descend de 10 unités pour trouver un deuxième point sur la droite. La fonction f est donc bien représentée par la droite (N).

Partie B

1) $f(3) = 60 - 10 \times 3 = 30$. Donc, au bout de 300 kilomètres, le réservoir de Nabolos contient 30 litres d'essence.

2) Le coefficient directeur de f est -10 donc, pour 100 kilomètres parcourus, le véhicule de Nabolos a consommé 10 litres d'essence.

   Le coefficient directeur de g est -5 donc, pour 100 kilomètres parcourus, le véhicule de Adamos a consommé 5 litres d'essence. C'est le véhicule de Adamos qui est le plus économique.

3) a) $f(0) = 60$ et $g(0) = 40$ donc, pour le véhicule de Nabolos, le réservoir a une contenance de 60 litres, et pour le réservoir de Adamos, le réservoir a une contenance de 40 litres.

   b) La distance maximale parcourue par un véhicule est obtenue lorsque toute l'essence a été consommée, c'est-à-dire lorsqu'il y a 0 litre dans le réservoir. Or, 0 a pour antécédent 6 par la fonction f et 8 par la fonction g.

   Donc, la distance maximale que peut parcourir le véhicule de Nabolos est 600 kilomètres, et celle que peut parcourir le véhicule de Adamos est 800 km.

   c) $g(7) = 5$ donc, après 700 kilomètres il ne reste plus que 5 litres d'essence dans le réservoir du véhicule d'Adamos. Son véhicule a donc consommé $40 - 5 = 35$ litres.

4) a) On a :

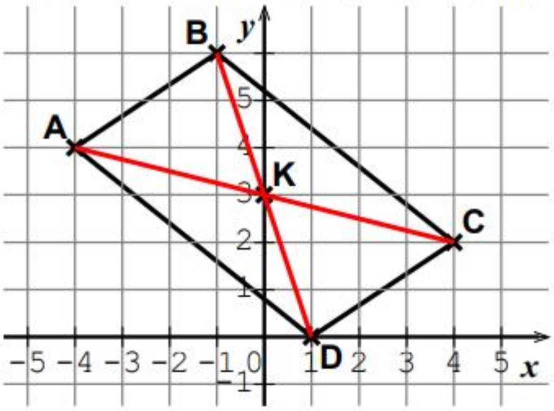
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 60 - 10x = 40 - 5x \\ &\iff 60 - 10x + 5x = 40 \\ &\iff 60 - 5x = 40 \\ &\iff -5x = 40 - 60 \\ &\iff -5x = -20 \\ &\iff x = \frac{-20}{-5} = 4 \end{aligned}$$

   L'équation $f(x) = g(x)$ a une seule solution :4.

   b) Au bout de 400 km, les réservoirs des deux véhicules contiennent la même quantité d'essence.

Exercice 7 – Vecteurs

1) Construction des points $A(-4;4)$, $B(-1;6)$ et $C(4;2)$.



2) $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-4+4}{2} = 0$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Le milieu de $[AC]$ est le point $K(0;3)$.

3) On calcule les coordonnées du point D tel que K soit le milieu de $[BD]$.

On a alors $x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow x_D = 2x_K - x_B = 2\times 0 - (-1) = 1$ et $y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow y_D = 2y_K - y_B = 2\times 3 - 6 = 0$.

Le symétrique de B par rapport à K et le point $D(1;0)$.

4) Puisque K est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent leur milieu K.

On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

5) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-4) \\ 6-4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6) $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

7) $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (2-6)^2} = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

Puisque $AB \neq BC$, on en déduit que ABCD n'est pas un losange.

Exercice 8 – Probabilités

	M	$\overline{M}$	Total
F	10	65	75
$\overline{F}$	10	15	25
Total	20	80	100

1. $P(\overline{F}) = \dfrac{25}{100} = 0,25$

2. $P(\overline{M}) = \dfrac{80}{100} = 0,8$

3. $P(\overline{F} \cap \overline{M}) = \dfrac{15}{100} = 0,15$

4. $P(\overline{F} \cup \overline{M}) = P(\overline{F}) + P(\overline{M}) - P(\overline{F} \cap \overline{M}) = 0,25 + 0,8 - 0,15 = 0,9$

5. $P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = \dfrac{75}{100} + \dfrac{20}{100} - \dfrac{10}{100} = 0,85$