

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°8 (80MIN)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

NOM - PRÉNOM :

Exercice 1 - Inéquations (10 points)

Cet exercice peut être fait directement sur l'énoncé.

1. Résoudre l'inéquation $(3x - 5)(4 + 2x) > 0$.

$$\begin{array}{ll} 3x - 5 = 0 & 4 + 2x = 0 \\ 3x = 5 & 2x = -4 \\ x = \frac{5}{3} & x = \frac{-4}{2} \\ & x = -2 \end{array}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{5}{3}$	+	$+\infty$	
$3x - 5$		-	-	0	+	
$4 + 2x$		-	0	+	+	
$(3x - 5)(4 + 2x)$		+	0	-	0	+

$m = 3 > 0$

$m = 2 > 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]\frac{5}{3}; +\infty[$

2. Résoudre l'inéquation $\frac{x - 5}{-2x + 7} \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} x - 5 = 0 & -2x + 7 = 0 \\ x = 5 & -2x = -7 \\ & x = \frac{-7}{-2} \\ & x = \frac{7}{2} \end{array}$$

$\frac{7}{2}$ est une valeur interdite car le dénominateur ne doit pas être nul.

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	5	+	$+\infty$
$x - 5$		-	-	0	+
$-2x + 7$		+	-	-	-
$\frac{x - 5}{-2x + 7}$		-	+	0	-

$m = 1 > 0$

$m = -2 < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} =]\frac{7}{2}; 5]$

3. Résoudre l'inéquation $(2x - 1)(3 - x) < (2x - 1)(5x + 1)$.

$$\begin{aligned}
 (2x - 1)(3 - x) < (2x - 1)(5x + 1) &\iff (2x - 1)(3 - x) - (2x - 1)(5x + 1) < 0 \\
 &\iff (2x - 1)[(3 - x) - (5x + 1)] < 0 \\
 &\iff (2x - 1)(3 - x - 5x - 1) < 0 \\
 &\iff (2x - 1)(-6x + 2) < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 2x - 1 = 0 & -6x + 2 = 0 \\
 2x = 1 & -6x = -2 \\
 x = \frac{1}{2} & x = \frac{-2}{-6} \\
 & x = \frac{1}{3}
 \end{array}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x - 1$	-	0	0	+	
$-6x + 2$	+	0	-	-	
$(2x - 1)(-6x + 2)$	-	0	+	0	-

$$m = 2 > 0$$

$$m = -6 < 0$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

4. (a) Démontrer l'égalité $\frac{3x - 6}{2x + 3} - \frac{4 - 7x}{2x - 2} = \frac{5x(4x - 1)}{(2x - 2)(2x + 3)}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{3x - 6}{2x + 3} - \frac{4 - 7x}{2x - 2} &= \frac{3x - 6}{2x + 3} \times \frac{2x - 2}{2x - 2} - \frac{4 - 7x}{2x - 2} \times \frac{2x + 3}{2x + 3} \\
 &= \frac{(3x - 6)(2x - 2) - (4 - 7x)(2x + 3)}{(2x - 2)(2x + 3)} \\
 &= \frac{6x^2 - 6x - 12x + 12 - (8x + 12 - 14x^2 - 21x)}{(2x - 2)(2x + 3)} \\
 &= \frac{6x^2 - 6x - 12x + 12 - 8x - 12 + 14x^2 + 21x}{(2x - 2)(2x + 3)} \\
 &= \frac{20x^2 - 5x}{(2x - 2)(2x + 3)} \\
 &= \frac{5x(4x - 1)}{(2x - 2)(2x + 3)}
 \end{aligned}$$

(b) Résoudre l'inéquation $\frac{3x - 6}{2x + 3} < \frac{4 - 7x}{2x - 2}$.

$$\frac{3x - 6}{2x + 3} < \frac{4 - 7x}{2x - 2} \iff \frac{3x - 6}{2x + 3} - \frac{4 - 7x}{2x - 2} < 0$$

$$\iff \frac{5x(4x - 1)}{(2x - 2)(2x + 3)} < 0 \quad \text{d'après la question précédente}$$

$$5x = 0$$

$$x = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$-\frac{3}{2}$ et 1 sont des valeurs interdites car le dénominateur ne doit pas être nul.

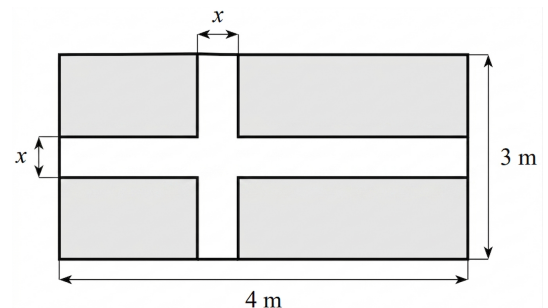
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$	
$5x$	-	-	0	+	+	+	$m = 5 > 0$
$4x - 1$	-	-	-	0	+	+	$m = 4 > 0$
$2x - 2$	-	-	-	-	-	+	$m = 2 > 0$
$2x + 3$	-	+	+	+	+	+	$m = 2 > 0$
$\frac{5x(4x - 1)}{(2x - 2)(2x + 3)}$	+	-	0	+	0	-	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \left] -\frac{3}{2}; 0 \right[\cup \left] \frac{1}{4}; 1 \right[$

Exercice 2 - Une histoire de drapeau (3 points)

On considère le drapeau ci-contre. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ? Développer $(x - 1)(x - 6)$ pourra s'avérer utile à un moment.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation, alors il faut tenter !



L'aire de la croix est égale à l'aire de la bande horizontale plus l'aire de la bande verticale moins l'aire de l'intersection entre les deux bandes.

- Aire de la bande horizontale : $4x$.
- Aire de la bande verticale : $3x$.
- Aire de l'intersection : x^2 .

On en déduit que l'aire de la croix est égale à :

$$\mathcal{A}_{\text{croix}} = 4x + 3x - x^2 = 7x - x^2$$

Pour que l'aire de la croix soit égale à l'aire restante du drapeau, il faut que $\mathcal{A}_{\text{croix}} = 12 - \mathcal{A}_{\text{croix}}$.
On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{croix}} = 12 - \mathcal{A}_{\text{croix}} &\iff 2 \times \mathcal{A}_{\text{croix}} = 12 \\ &\iff \mathcal{A}_{\text{croix}} = 6 \\ &\iff 7x - x^2 = 6 \\ &\iff x^2 - 7x + 6 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre une équation qui contient du x^2 sans factorisation évidente, on va donc utiliser l'indication.

$$(x - 1)(x - 6) = x^2 - 6x - x + 6 = x^2 - 7x + 6$$

On peut ainsi résoudre l'équation qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 6 = 0 &\iff (x - 1)(x - 6) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } x - 6 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 6 \end{aligned}$$

Enfin, la figure n'est possible que lorsque $x \in [0; 3]$ donc l'unique solution à notre problème est $x = 1\text{m}$.

Exercice 3 - Étude d'un bénéfice (7 points)

Élisa possède une petite entreprise artisanale où elle fabrique des ceintures en cuir de haute qualité. Comme elle fabrique chaque ceinture entièrement à la main, son travail est très long. À cause de cette contrainte de temps et de la petite taille de son atelier, Élisa ne peut pas fabriquer plus de 34 ceintures par mois.

Le coût total de fabrication mensuel, exprimé en euros, pour x ceintures, est modélisé par la fonction C définie sur $[0; 34]$ par

$$C(x) = 2x^2 + 12x + 240$$

Une représentation graphique de la fonction C est fournie à la fin de l'exercice.

Partie A : Étude graphique

Chaque ceinture est vendue au prix de 80€.

La recette mensuelle $R(x)$ réalisée par la vente de x ceintures est donc $R(x) = 80x$.

1. Tracer sur le graphique en fin d'exercice la courbe représentative de la fonction R .
 R est une fonction affine, il suffit donc de deux points pour pouvoir tracer sa courbe représentative.
Par exemple, $R(0) = 80 \times 0 = 0$ et $R(30) = 80 \times 30 = 2400$.
2. Avec la précision permise par le graphique, estimer le nombre de ceintures à vendre pour réaliser un bénéfice.
L'entreprise réalise du bénéfice lorsque la recette est supérieure aux coûts de production, c'est-à-dire lorsqu'elle produit entre 5 et 29 ceintures par mois.

Partie B : Étude du bénéfice

1. Donner la formule qui relie la recette R , les coûts de production C et le bénéfice B .
Bénéfice = Recette - Coûts.
2. Démontrer que le bénéfice, en euros, pour la vente de x ceintures est donné par la fonction B définie par :

$$B(x) = -2x^2 + 68x - 240$$

Pour tout nombre réel $x \in [0; 34]$,

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ B(x) &= 80x - (2x^2 + 12x + 240) \\ B(x) &= 80x - 2x^2 - 12x - 240 \\ B(x) &= -2x^2 + 68x - 240 \end{aligned}$$

3. Justifier que, pour tout réel $x \in [0; 34]$, $B(x) = (-2x + 8)(x - 30)$.
On développe cette expression factorisée et on vérifie que l'on retombe bien sur $B(x)$.

$$\begin{aligned} (-2x + 8)(x - 30) &= -2x \times x - 2x \times (-30) + 8 \times x + 8 \times (-30) \\ &= -2x^2 + 60x + 8x - 240 \\ &= -2x^2 + 68x - 240 \\ &= B(x) \end{aligned}$$



Ne pas écrire $B(x) = (-2x + 8)(x - 30)$ dès la première ligne car c'est ce qu'on cherche à démontrer.

4. Dresser le tableau de signes de la fonction B .

$$\begin{array}{ll} -2x + 8 = 0 & x - 30 = 0 \\ -2x = -8 & x = 30 \\ x = \frac{-8}{-2} & \\ x = 4 & \end{array}$$

x	0	4	30	34	
$-2x + 8$	+	0	-	-	
$1x - 30$	-	-	0	+	
$(-2x + 8)(x - 30)$	-	0	+	0	-

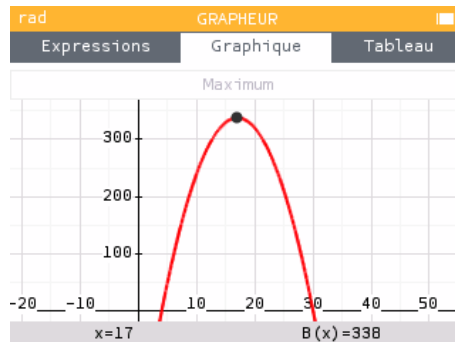
$$m = -2 < 0$$

$$m = 1 > 0$$

5. En déduire la quantité de ceintures à vendre pour réaliser un bénéfice. Justifier votre réponse.

Dans la dernière ligne du tableau, on constate que le bénéfice est positif lorsque $x \in]4; 30[$.
Ainsi, Éliisa doit fabriquer et vendre entre 5 et 29 ceintures pour réaliser un bénéfice.

6. **Bonus** : Déterminer la quantité de ceintures à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.



A l'aide de la calculatrice, il semblerait que le maximum soit atteint lorsque Éliisa vend 17 ceintures et ce bénéfice est alors de 338€.

Pour le démontrer rigoureusement, on utilise les solutions de l'équation $B(x) = 0$.

La fonction B s'annule en $x = 4$ et en $x = 30$, le maximum se situera alors au « centre » de ces deux valeurs, et pour la déterminer on va calculer leur moyenne.

$$\frac{4 + 30}{2} = 17$$

Éliisa réalise bien un bénéfice maximal lorsqu'elle vend 17 ceintures.

$$B(17) = -2 \times 17^2 + 68 \times 17 - 240 = 338$$

Le bénéfice maximal réalisé sera alors de 338€.

