DS4 Seconde (1h)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

NOM - Prénom : 17 mars 2023

Exercice 1 - Résolution d'une inéquation produit (4 points)

En s'aidant d'un tableau de signes, résoudre les inéquations suivantes :

1. $(-2x+4)(7x+3) \leqslant 0$

2. $(2x-1)(x+5)+(2x-1)(3x-4)<0$

1. $(-2x+4)(7x+3) \leqslant 0$

- $-2x+4=0 \iff -2x=-4 \iff x=\dfrac{-4}{-2} \iff x=2$
- $7x+3=0 \iff 7x=-3 \iff x=-\dfrac{3}{7}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		2		$+\infty$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$		$m=-2<0$
$7x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$m=7>0$
$(-2x+4)(7x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

$$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty;-\frac{3}{7}\right] \cup [2;+\infty[}$$

2. Il faut tout d'abord factoriser pour se ramener à une inéquation produit.

$$(2x-1)(x+5)+(2x-1)(3x-4)<0$$
$$(2x-1)\left[(x+5)+(3x-4)\right]<0$$
$$(2x-1)(4x+1)<0$$

- $2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\dfrac{1}{2}$
- $4x+1=0 \iff 4x=-1 \iff x=-\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$-$		$m=2>0$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$m=4>0$
$(2x-1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

$$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[}$$

Exercice 2 - Étude d'un bénéfice (10 points)

Un artisan fabrique chaque jour x vases. La production quotidienne ne peut pas dépasser les 60 vases.
Le coût total, exprimé en euros, de fabrication de x vases est modélisé par la fonction C définie sur $[0;60]$ par :

$$C(x) = x^2 - 30x + 300$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_C$ de cette fonction a été tracée dans le repère ci-dessous.
On admet que chaque vase fabriqué est vendu au prix unitaire de 10€.

1. Est-il plus avantageux pour l'artisan de fabriquer et vendre 15 vases ou de fabriquer et vendre 28 vases ?
$R(15) = 10 \times 15 = 150.$
$C(15) = 15^2 - 30 \times 15 + 300 = 75.$
$R(15) - C(15) = 150 - 75 = 75.$
Le bénéfice réalisé pour la vente de 15 vases est de 75€.

$R(28) = 10 \times 28 = 280.$
$C(28) = 28^2 - 30 \times 28 + 300 = 244.$
$R(28) - C(28) = 280 - 244 = 36.$
Le bénéfice réalisé pour la vente de 28 vases est de 36€.

En conclusion, $\boxed{\text{il est plus rentable pour l'artisan de vendre 15 vases}}$.

2. On désigne par $R(x)$ le montant en euros de la recette quotidienne pour la vente de x vases. On a donc :

$$R(x) = 10x$$

(a) Tracer dans le repère la courbe $\mathscr{C}_R$ représentative de la fonction recette.
R est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.
Il suffit donc d'obtenir deux points de cette droite pour la tracer.
$R(0) = 10 \times 0 = 0$ $\quad$ $R(50) = 10 \times 50 = 500$

(b) Par lecture graphique, déterminer approximativement :

- l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'artisan réalise un bénéfice positif.
  L'artisan réalise un bénéfice positif lorsque la courbe de la recette $\mathscr{C}_R$ est au-dessus de la courbe des coûts $\mathscr{C}_C$. Ainsi, $\boxed{\text{l'artisan réalise un bénéfice positif lorsqu'il fabrique et vend entre 10 et 30 vases.}}$
- la production pour laquelle le bénéfice est maximal.
  Le bénéfice est maximal lorsque la courbe de la de la recette $\mathscr{C}_R$ est au-dessus de la courbe des coûts $\mathscr{C}_C$ et que l'écart entre les deux courbes est le plus grand.
  On en déduit que $\boxed{\text{le bénéfice semble maximal lorsque l'artisan fabrique et vend 20 vases.}}$

3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice quotidien, en euros, réalisé lorsque l'artisan produit et vend x vases.

(a) Démontrer que le bénéfice, exprimé en euros, lorsque l'artisan fabrique et vend x vases est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 40x - 300 \qquad \text{avec } x \in [0;60]$$

Pour tout $x \in [0;60]$,

$$B(x) = R(x) - C(x)$$
$$B(x) = 10x - (x^2 - 30x + 300)$$
$$B(x) = 10x - x^2 + 30x - 300$$
$$\boxed{B(x) = -x^2 + 40x - 300}$$

(b) Démontrer que, pour tout $x \in [0;60]$, on a aussi $B(x) = (-x+30)(x-10)$.
Pour tout $x \in [0;60]$,

$$\begin{aligned}(-x+30)(x-10) &= -x \times x - x \times (-10) + 30 \times x + 30 \times (-10)\\ &= -x^2 + 10x + 30x - 300\\ &= -x^2 + 40x - 300\\ &= B(x)\end{aligned}$$

(c) Étudier le signe de $B(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
On étudie le signe de $B(x)$ à l'aide de l'expression $B(x) = (-x+30)(x-10)$.

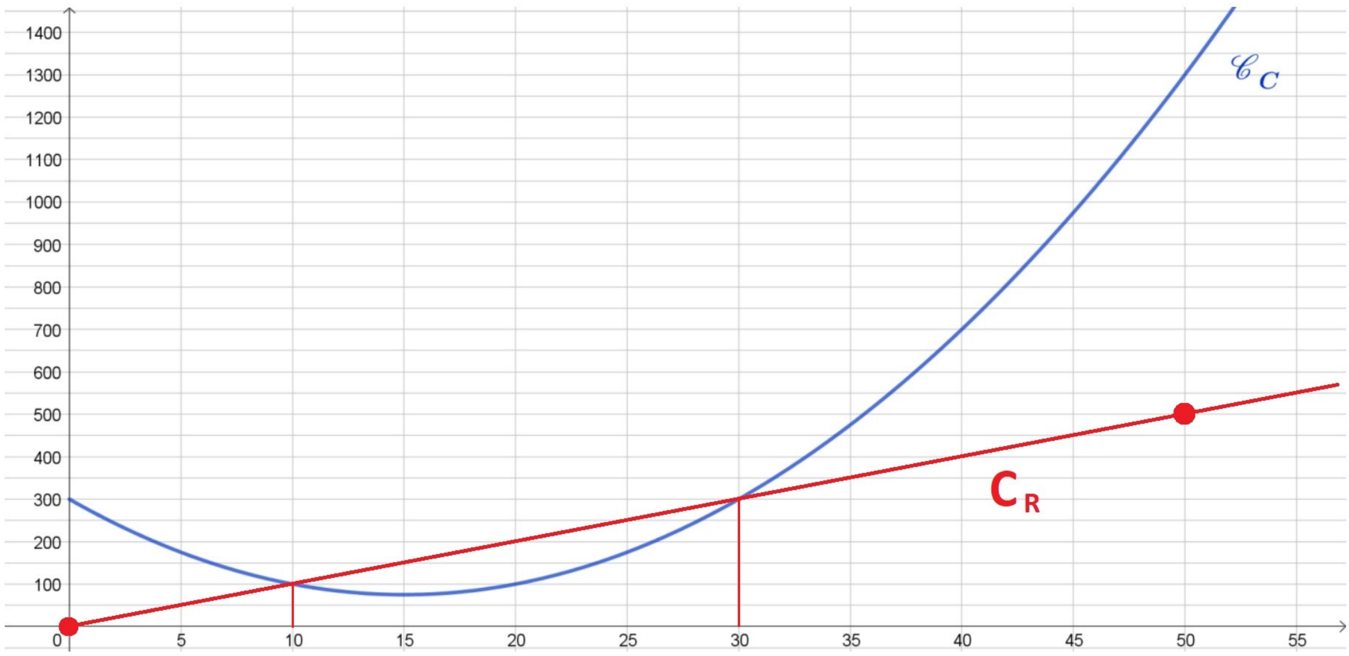
- $-x+30=0 \iff x=30$
- $x-10=0 \iff x=10$

x	0		10		30		60	
$-x+30$		$+$		$+$	0	$-$		$m=-1<0$
$x-10$		$-$	0	$+$		$+$		$m=1>0$
$(-x+30)(x-10)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

(d) En déduire le nombres de vases à fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice positif.
D'après ce qui précède, pour tout $x \in [0;60]$,

$$B(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad x \in [10;30]$$

En conclusion, $\boxed{\text{l'artisan réalise un bénéfice positif lorsqu'il fabrique et vend entre } 10 \text{ et } 30 \text{ vases.}}$



Exercice 3 - Géométrie (6 points)

PARTIE A

1. Factoriser l'expression $x^2 - 4x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x = x(x-4)$.

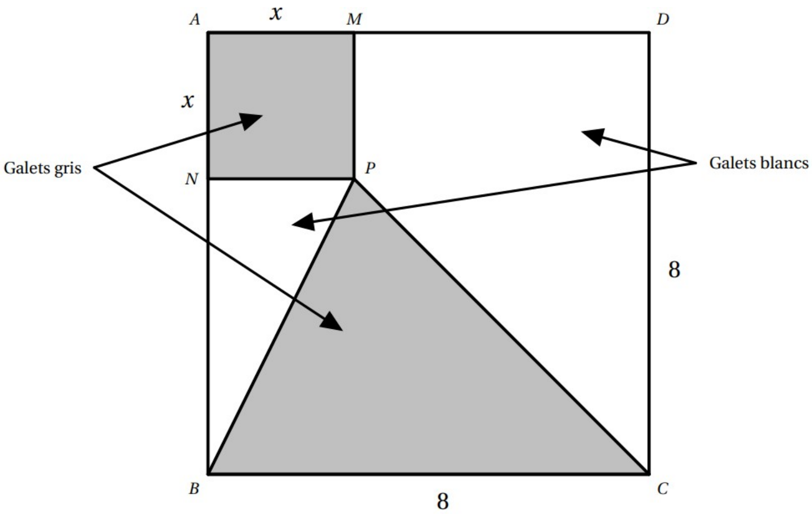
2. En déduire le tableau de signes de $x^2 - 4x$ en complétant le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$m = 1 > 0$
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$		$m = 1 > 0$
$x^2 - 4x$		$+$	0	$-$	0	$+$		

PARTIE B

On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie A pour répondre aux questions de la partie B.

Une terrasse carrée mesure 8 mètres de côté. On souhaite remplir cette terrasse de galets de deux couleurs différentes, des gris et des blancs suivant le schéma suivant :



- Le point M est mobile sur le segment $[AD]$.
- On note x la longueur AM.
- Les points N et P sont construits tels que $AMPN$ soit un carré.

3. Quelles sont les valeurs possibles de x pour que l'aire de la surface en galets gris soit supérieure à la moitié de l'aire totale de la terrasse ?
On pose $x = AM$. On a donc $BN = 8 - x$.
x peut prendre des valeurs entre 0 et 8 mètres.
Pour tout $x \in [0;8]$, on a :

$$\mathscr{A}_{AMPN} = \text{côté} \times \text{côté} = AM \times AN = x \times x = x^2$$

$$\mathscr{A}_{BPC} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times BN}{2} = \frac{8 \times (8-x)}{2} = 32 - 4x$$

On cherche les valeurs possibles de x pour que l'aire de la surface grise soit supérieure à la moitié de l'aire totale de la terrasse. On cherche donc à résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\text{grise}} &> \frac{\mathscr{A}_{\text{terrasse}}}{2} \\
\mathscr{A}_{AMPN} + \mathscr{A}_{BPC} &> \frac{8 \times 8}{2} \\
x^2 - 4x + 32 &> 32 \\
x^2 - 4x &> 0
\end{aligned}$$

D'après la partie A, $x^2 - 4x \geqslant 0$ lorsque $x \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$.
Dans notre problème, x prend des valeurs comprises entre 0 et 8 donc, l'aire de la surface grise est supérieure à la moitié de l'aire totale de la terrasse lorsque $\boxed{x \text{ se situe entre } 4 \text{ et } 8 \text{ mètres}}$.

PARTIE C

Pour vérifier vos réponses, l'entrepreneur qui va réaliser la terrasse a créé une page de calcul sur un tableur :

	A	B
1	Valeur de x en mètres	Aire de la surface en galets gris en m²
2	0	32
3	1	29
4	2	28
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

4. Quelle formule a-t-il écrit dans la cellule B2 pour pouvoir l'étirer vers le bas et obtenir l'aire de la surface en galets gris en fonction des différentes valeurs de x indiquées en colonne A ?
Dans la cellule B2, on peut écrire la formule $\boxed{\text{=A2*A2-4*A2+32}}$.