

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°7 (50MIN)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

NOM - PRÉNOM :

Exercice 1 - Cours (3 points)

Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est aussi un multiple de 5.

Soit a et b deux multiples de 5.

Comme a est un multiple de 5, il existe un entier k_1 tel que $a = 5k_1$.

Comme b est un multiple de 5, il existe un entier k_2 tel que $b = 5k_2$.

On a alors $a + b = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2) = 5k$, où $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que $a + b$ est un multiple de 5.

Exercice 2 - Nombres premiers (3 points)

1. Donner la définition d'un nombre premier.

Un entier naturel est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs.

2. Décomposer en produit de nombres premiers 1260 et 441.

$$1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$$

3. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{1260}{441}$.

$$\frac{1260}{441} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

7 et 20 sont premiers entre eux donc $\frac{20}{7}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{1260}{441}$.

Exercice 3 - Vrai ou Faux (7 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. **Affirmation 1** : La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

FAUX

3 est un nombre premier, 5 est un nombre premier, mais $3 + 5 = 8$ n'est pas un nombre premier.

2. **Affirmation 2** : 111 est un nombre premier.

FAUX

$1 + 1 + 1 = 3$ et 3 est divisible par 3, donc 111 est divisible par 3.

Par conséquent, 111 n'est pas un nombre premier.

3. **Affirmation 3** : Si un entier n est divisible par 8, alors c'est un multiple de 4.

VRAI

Soit n un entier divisible par 8.

Par conséquent, il existe un entier k tel que $n = 8k$.

On a alors :

$$n = 8k = 4 \times 2k = 4K \quad \text{où } K = 2k \in \mathbb{Z}$$

En conclusion, n est un multiple de 4.

4. **Affirmation 4** : La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 6.

FAUX

6 est un multiple de 3, 9 est un multiple de 3, mais $6 + 9 = 15$ n'est pas un multiple de 6.

5. **Affirmation 5** : Si n est un nombre impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

VRAI

Soit n un nombre impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4 \times k(k + 1) \end{aligned}$$

On en déduit déjà que $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

De plus, $k(k + 1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc l'un au moins de ces deux nombres est pair et alors le produit $k(k + 1)$ sera aussi pair. (Il faudrait en théorie démontrer rigoureusement cette propriété mais j'accepterai que vous l'admettiez ici)

Il existe donc un entier p tel que $k(k + 1) = 2p$ d'où :

$$n^2 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2p = 8p$$

On en déduit que $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 4 - Critères de divisibilité (3 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer, en justifiant, les chiffres a et b tels que :

1. $524a$ est divisible par 4.

$$\begin{aligned} 524a \text{ est divisible par } 4 &\iff 4a \text{ est divisible par } 4 \\ &\iff \boxed{a = 0 \text{ ou } a = 4 \text{ ou } a = 8} \end{aligned}$$

2. $7a2b$ est divisible par 3 et par 5.

Tout d'abord,

$$7a2b \text{ est divisible par } 5 \iff b = 0 \text{ ou } b = 5$$

Traitons maintenant chaque cas à part.

Cas où $b = 0$:

$$\begin{aligned} 7a20 \text{ est divisible par } 3 &\iff 7 + a + 2 + 0 \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff 9 + a \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = 3 \text{ ou } a = 6 \text{ ou } a = 9 \end{aligned}$$

Cas où $b = 5$:

$$\begin{aligned} 7a25 \text{ est divisible par } 3 &\iff 7 + a + 2 + 5 \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff 14 + a \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff a = 1 \text{ ou } a = 4 \text{ ou } a = 7 \end{aligned}$$

En conclusion, les couples $(a; b)$ solutions sont :

$$\boxed{(0; 0); (0; 3); (0; 6); (0; 9); (5; 1); (5; 4); (5; 7)}$$

Exercice 5 - Mots croisés (4 points)

Compléter cette grille de nombres croisés directement sur l'énoncé.

Horizontalement

- 1 - Multiple de 3 et de 4.
- 2 - Multiple de 2, de 3 et de 13.
- 3 - Divisible par 47 et par 9.
- 4 - Multiple de 11 et de 9.

Verticalement

- A - Multiple de 10 et de 8.
- B - Divisible par 9 et le produit de ses chiffres est égal à 24.
- C - Carré d'un nombre entier inférieur à 20.
- D - Multiple de 36.

	A	B	C	D
1	1	2		7
2		3	1	2
3	8	4	6	
4	0		9	9