

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°8 (90MIN)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Cours (2 points)

Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est aussi un multiple de 5.

Soit a et b deux multiples de 5.

Comme a est un multiple de 5, il existe un entier k_1 tel que $a = 5k_1$.

Comme b est un multiple de 5, il existe un entier k_2 tel que $b = 5k_2$.

On a alors $a + b = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2) = 5k$, où $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que $a + b$ est un multiple de 5.

Exercice 2 - Nombres premiers (2 points)

1. Décomposer en produit de nombres premiers 756 et 441.

$$756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

$$441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$$

2. En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{756}{441}$.

$$\frac{756}{441} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 3}{7} = \frac{12}{7}$$

7 et 12 sont premiers entre eux donc $\frac{12}{7}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{756}{441}$.

Exercice 3 - Critères de divisibilité (3 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer, en justifiant, les chiffres a et b tels que :

1. $234a$ est divisible par 4.

$$234a \text{ est divisible par } 4 \iff 4a \text{ est divisible par } 4$$

$$\iff a = 0 \text{ ou } a = 4 \text{ ou } a = 8$$

2. $652b$ est divisible par 6.

D'une part,

$$652b \text{ est divisible par } 2 \iff b = 0 \text{ ou } b = 2 \text{ ou } b = 4 \text{ ou } b = 6 \text{ ou } b = 8$$

D'autre part,

$$652b \text{ est divisible par } 3 \iff 6 + 5 + 2 + b \text{ est divisible par } 3$$

$$\iff 13 + b \text{ est divisible par } 3$$

$$\iff b = 2 \text{ ou } b = 5 \text{ ou } b = 8$$

En conclusion,

$$652b \text{ est divisible par } 6 \iff 652b \text{ est divisible par } 2 \text{ et par } 3$$

$$\iff b = 2 \text{ ou } b = 8$$

Exercice 4 - Vrai ou Faux (4 points)

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. Affirmation 1 : Tous les nombres premiers sont impairs.

FAUX

Prenons comme contre-exemple $n = 2$. 2 est un nombre premier et pourtant il n'est pas impair.

2. Affirmation 2 : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.

VRAI

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Les diviseurs communs de 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6 qui sont exactement les diviseurs de 6.

3. **Affirmation 3** : 4 n'admet que deux diviseurs.

FAUX

Les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4, il y a en a trois.

4. **Affirmation 4** : Si n est un entier impair, alors n^3 est un entier impair.

VRAI

Soit n un entier impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}n^3 &= (2k + 1)^3 \\&= (2k + 1)^2 \times (2k + 1) \\&= (4k^2 + 4k + 1) \times (2k + 1) \\&= 8k^3 + 4k^2 + 8k^2 + 4k + 2k + 1 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\&= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 \\&= 2K + 1 \quad \text{où } K = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Par conséquent, n^3 est un entier impair.

Exercice 5 - Inéquations quotient (5 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{-3x + 9}{2x - 1} \geq 0$

2. $\frac{-9x}{2x - 4} < 4$

1. $-3x + 9 = 0$
 $3x = 9$
 $x = 3$

$2x - 1 = 0$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

La valeur interdite est $x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$-3x + 9$	+	+	0	-	$m = -3 < 0$
$2x - 1$	-	+	+	+	$m = 2 > 0$
$\frac{-3x + 9}{2x - 1}$	-	+	0	-	

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}; 3 \right]$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{-9x}{2x - 4} < 4 &\iff \frac{-9x}{2x - 4} - 4 < 0 \\&\iff \frac{-9x}{2x - 4} - 4 \times \frac{2x - 4}{2x - 4} < 0 \\&\iff \frac{-9x - 4(2x - 4)}{2x - 4} < 0 \\&\iff \frac{-9x - 8x + 16}{2x - 4} < 0 \\&\iff \frac{-17x + 16}{2x - 4} < 0\end{aligned}$$

$-17x + 16 = 0$
 $17x = 16$
 $x = \frac{16}{17}$

$2x - 4 = 0$
 $2x = 4$
 $x = 2$

La valeur interdite est $x = 2$.

x	$-\infty$	$\frac{16}{17}$	2	$+\infty$	
$-17x + 16$		+	0	-	$m = -17 < 0$
$2x - 4$		-	-	+	$m = 2 > 0$
$\frac{-17x + 16}{2x - 4}$		-	0	+	

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{16}{17} \right[\cup]2; +\infty[$$

Exercice 6 - Inéquation produit (4 points)

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a :

$$-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 4 = (2x - 4)(1 - x)(1 + x^2)$$

Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} (2x - 4)(1 - x)(1 + x^2) &= (2x - 2x^2 - 4 + 4x)(1 + x^2) \\ &= (-2x^2 + 6x - 4)(1 + x^2) \\ &= -2x^2 - 2x^4 + 6x + 6x^3 - 4 - 4x^2 \\ &= -2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

2. Grâce à un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 4 \leq 0$$

Pour étudier le signe de $-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 4$, on utilise bien évidemment la forme factorisée de la question 1 !
On pourra alors étudier le signe de chacun des facteurs, ce qui est bien plus simple que d'essayer de s'attaquer directement à $-2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 4$.

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $1 + x^2 > 0$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 4 = 0 & 1 - x = 0 \\ 2x = 4 & x = 1 \\ x = 2 & \end{array}$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$2x - 4$		-	0	+	$m = 2 > 0$
$1 - x$		+	0	-	$m = -1 < 0$
$1 + x^2$		+	+	+	
$(2x - 4)(1 - x)(1 + x^2)$		-	0	+	

$$\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$