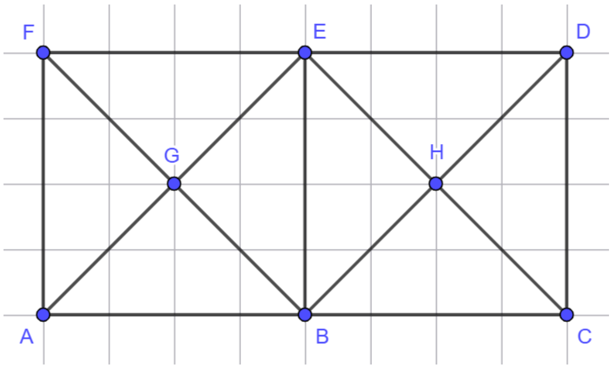
Correction Devoir Surveillé N°3A (55min)

Exercice 1 - Échauffement (3,5 points)



1. Compléter ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{HC}$ **(b)** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$ **(c)** $\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{GE}$

2. Compléter ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$ **(b)** $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BE}$

(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FH}$ **(d)** $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 2 - Vecteurs avec coordonnées (6,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-2;1) \qquad B(-3;5) \qquad C(1;6) \qquad D(2;2)$$

Faire un dessin pour vérifier ses résultats est toujours une bonne idée !

1. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-2 \\ 6-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle.

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 6-5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Nous travaillons dans un repère orthonormé donc :

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$BC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$CA = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

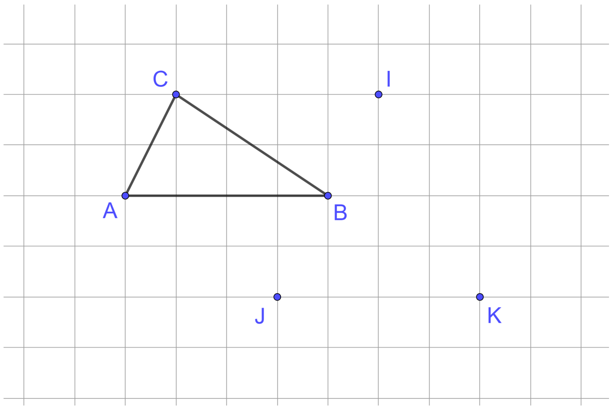
Tout d'abord, $AB = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

D'une part, $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17 + 17 = 34$.
D'autre part, $AC^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2 = 34$.
$AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

En conclusion, le triangle ABC est bien isocèle rectangle en B.

3. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
$ABCD$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit.
Par conséquent, $ABCD$ est un carré.

Exercice 3 - Vecteurs sans coordonnées (6 points)



1. Construire les points I, J et K définis par :

(a) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
(b) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
(c) $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AK}\\
&= -\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} && \text{d'après l'énoncé}\\
&= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

3. Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} && \text{d'après l'énoncé}\\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

4. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $CIKJ$?
D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{CI}$.
Par conséquent, le quadrilatère $CIKJ$ est un parallélogramme.

Exercice 4 - Développements (4 points)

Développer et réduire les expressions suivantes :

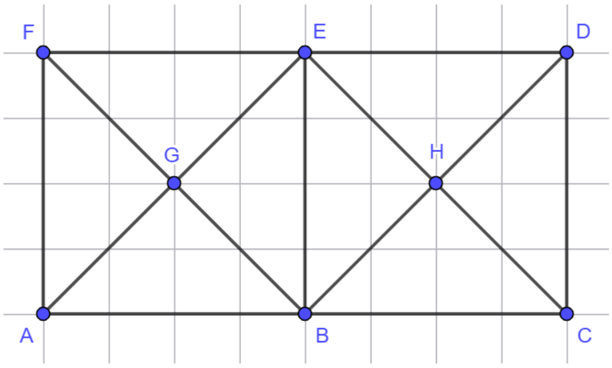
1. $A(x) = (3-2x)(4+x)$
$= 3\times 4 + 3\times x - 2x\times 4 - 2x\times x$
$= 12 + 3x - 8x - 2x^2$
$= -2x^2 - 5x + 12$

2. $B(x) = -3(2x+1)(-2+x)$
$= -3\left(2x\times(-2) + 2x\times x + 1\times(-2) + 1\times x\right)$
$= -3\left(-4x + 2x^2 - 2 + x\right)$
$= -3\left(2x^2 - 3x - 2\right)$
$= -6x^2 + 9x + 6$

3. $C(x) = (2x+3)^2 - (x+4)(x-4)$
$= (2x+3)(2x+3) - (x+4)(x-4)$
$= 2x\times 2x + 2x\times 3 + 3\times 2x + 3\times 3 - \left(x^2 - 4^2\right)$
$= 4x^2 + 6x + 6x + 9 - x^2 + 16$
$= 3x^2 + 12x + 25$

Correction Devoir Surveille N°3B (55min)

Exercice 1 - Échauffement (3,5 points)



1. Compléter ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{GA}$ **(b)** $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$ **(c)** $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{HE}$

2. Compléter ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}$ **(b)** $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{BE}$

(c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{DG}$ **(d)** $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC}$

Exercice 2 - Vecteurs avec coordonnées (6,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-2;1) \qquad B(-1;4) \qquad C(2;3) \qquad D(1;0)$$

Faire un dessin pour vérifier ses résultats est toujours une bonne idée !

1. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle.

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 3-4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nous travaillons dans un repère orthonormé donc :

$$AB = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$BC = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$CA = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

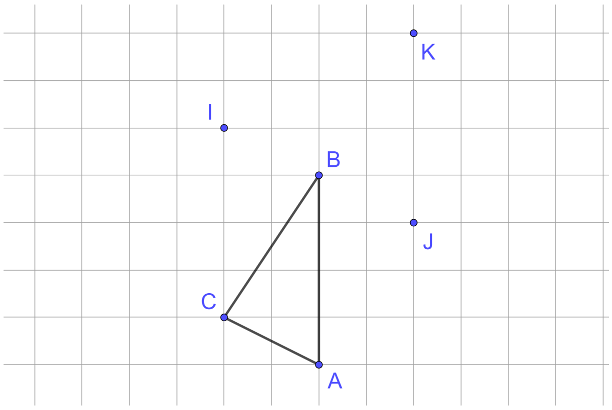
Tout d'abord, $AB = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

D'une part, $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$.
D'autre part, $AC^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$.
$AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

En conclusion, le triangle ABC est bien isocèle rectangle en B.

3. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.
$ABCD$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit.
Par conséquent, $ABCD$ est un carré.

Exercice 3 - Vecteurs sans coordonnées (6 points)



1. Construire les points I, J et K définis par :

(a) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

(c) $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AK}\\
&= -\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} && \text{d'après l'énoncé}\\
&= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

3. Démontrer ensuite que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} && \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} && \text{d'après l'énoncé}\\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

4. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $CIKJ$?
D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{CI}$.
Par conséquent, le quadrilatère $CIKJ$ est un parallélogramme.

Exercice 4 - Développements (4 points)

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A(x) = (2-3x)(4+x)$
$= 2\times 4 + 2\times x - 3x\times 4 - 3x\times x$
$= 8 + 2x - 12x - 3x^2$
$= -3x^2 - 10x + 8$

2. $B(x) = -2(3x+1)(-2+x)$
$= -2\left(3x\times(-2) + 3x\times x + 1\times(-2) + 1\times x\right)$
$= -2\left(-6x + 3x^2 - 2 + x\right)$
$= -2\left(3x^2 - 5x - 2\right)$
$= -6x^2 + 10x + 4$

3. $C(x) = (3x+1)^2 - (x+2)(x-2)$
$= (3x+1)(3x+1) - (x+2)(x-2)$
$= 3x\times 3x + 3x\times 1 + 1\times 3x + 1\times 1 - \left(x^2 - 2^2\right)$
$= 9x^2 + 3x + 3x + 1 - x^2 + 4$
$= 8x^2 + 6x + 5$