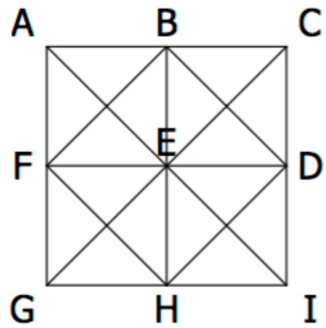
Correction Devoir Surveille N°3A (55min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Échauffement (5 points)

1. Compléter, sans justifier, ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AC}$ **(b)** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$ **(c)** $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{FA}$



2. Donner, sans justifier, l'image :

(a) du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FH}$: I

(b) du triangle FBE par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$: HDI

(c) du trapèze $AEHF$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$: $BDIE$

3. Compléter, sans justifier, ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE}$ **(b)** $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HB}$ **(c)** $\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IF}$ **(d)** $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{FE}$

Exercice 2 - Vecteurs sans coordonnées (6 points)

1. Tracer sur le quadrillage ci-dessous un parallélogramme $MATH$.

2. Construire l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$ qu'on notera E.

3. Construire l'image de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{MH}$ qu'on notera F.

4. **(a)** Démontrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{TE}$.

Comme E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MT}$, on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MT}$.
Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MT}$, alors $MAET$ est un parallélogramme.
$MAET$ est un parallélogramme donc on en déduit que $\boxed{\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{TE}}$.

(b) En déduire que T est le milieu de $[HE]$.

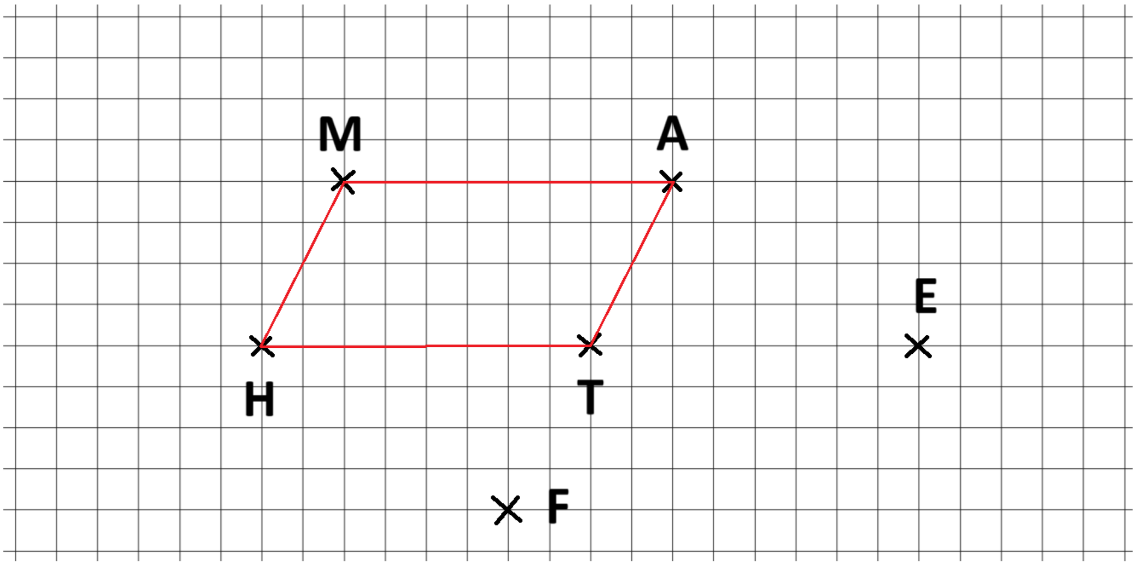
$MATH$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT}$.
D'après la question précédente, on a alors $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{TE}$.
Comme $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{TE}$, on en déduit finalement que $\boxed{T \text{ est le milieu de } [HE]}$.

5. Démontrer de même que T est le milieu de $[AF]$.

$MATH$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AT}$.
De plus, F est l'image de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{MH}$ donc $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{TF}$.
Ainsi, on en déduit que $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{TF}$.
Finalement, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TF}$ donc $\boxed{T \text{ est le milieu de } [AF]}$.

6. En déduire la nature du quadrilatère $AEFH$.

Les diagonales du quadrilatère $AEFH$ sont $[AF]$ et $[HE]$.
De plus, T est le milieu de $[AF]$ mais aussi le milieu de $[HE]$.
Ainsi, les diagonales du quadrilatère $AEFH$ se coupent en leur milieu donc $\boxed{AEFH \text{ est un parallélogramme}}$.



Exercice 3 - Vecteurs avec coordonnées (9 points)

On complètera la figure ci-dessous au fur et à mesure de l'exercice.

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A(-3;1)$, $B(0;-3)$ et $C(1;4)$.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ -3-1 \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 4-(-3) \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

3. Calculer les longueurs AB, BC et AC.
Nous travaillons dans un repère orthonormé.

$$AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$BC = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

De plus,

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-3))^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{AB = 5}$, $\boxed{AC = 5}$ et $\boxed{BC = \sqrt{50}}$.

4. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ? Justifier.
D'une part, $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.
D'autre part, $BC^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 = 50$.
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle, ABC est rectangle en A.
De plus, comme $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A.
En conclusion, $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est isocèle rectangle en } A}$.

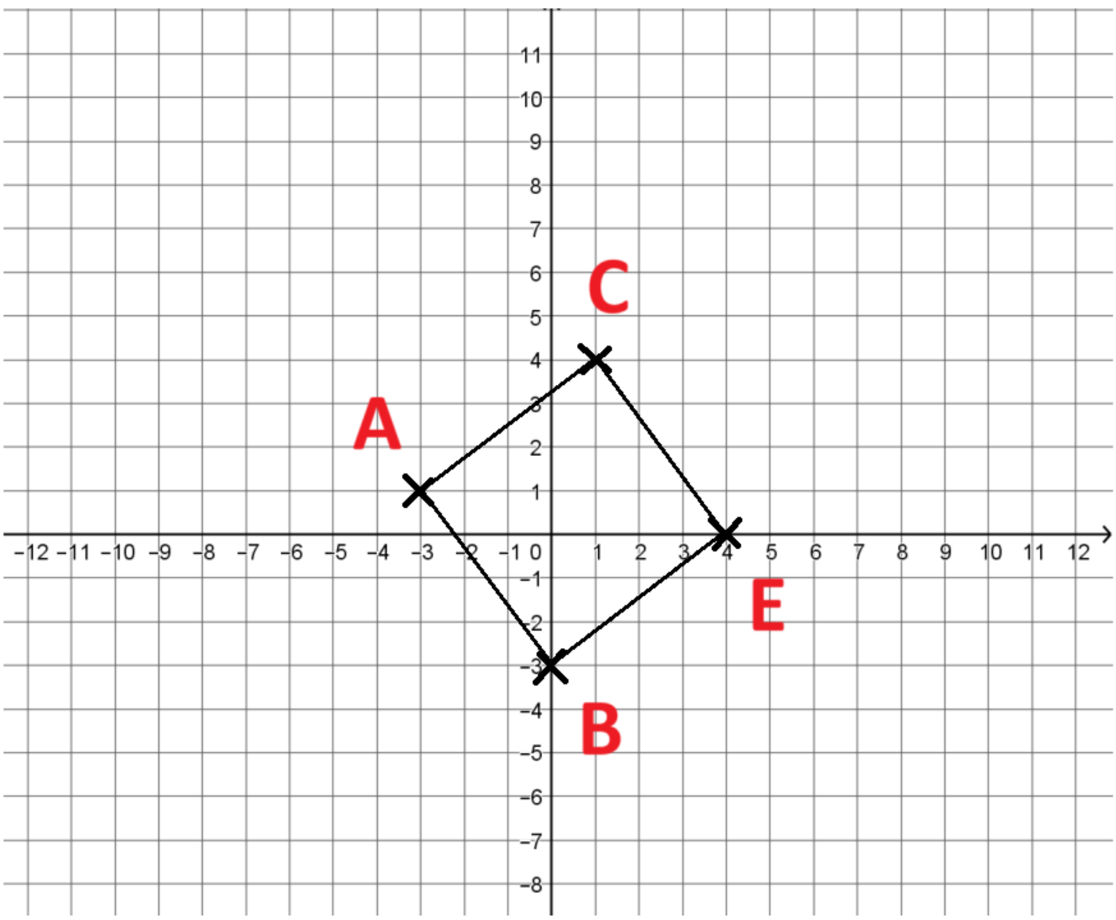
5. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ACEB$ soit un parallélogramme.
$ACEB$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{cases} 1 - (-3) = x_E - 0 \\ 4 - 1 = y_E - (-3) \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point E a donc pour coordonnées $\boxed{E(4;0)}$.

6. Quelle est la nature précise du quadrilatère $ACEB$? Justifier.
$ACEB$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit.
Par conséquent, $\boxed{ACEB \text{ est un carré}}$.

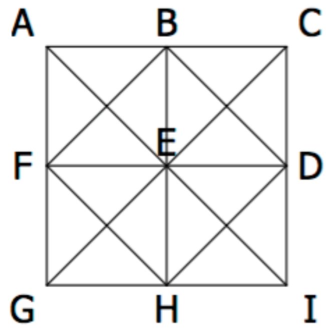
7. **(Bonus)** Soient K le milieu du segment $[AC]$ et L le symétrique de K par rapport au milieu Ω de $[BC]$.
Que peut-on dire des points B, L et E ? Justifier.



Correction Devoir Surveille N°3B (55min)

Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 - Échauffement (5 points)



1. Compléter, sans justifier, ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$ **(b)** $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$ **(c)** $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{DI}$

2. Donner, sans justifier, l'image :

(a) du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{EI}$: D

(b) du triangle FGH par la translation de vecteur $\overrightarrow{GE}$: BED

(c) du trapèze $CEHD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$: $BFGE$

3. Compléter, sans justifier, ces égalités de vecteurs en utilisant des points de la figure :

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$ **(b)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH}$ **(c)** $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GD}$ **(d)** $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{HE}$

Exercice 2 - Vecteurs sans coordonnées (6 points)

1. Tracer sur le quadrillage ci-dessous un parallélogramme $ABCD$.

2. Construire l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ qu'on notera E.

3. Construire l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ qu'on notera F.

4. **(a)** Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

Comme E est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, on a $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, alors $ABEC$ est un parallélogramme.
$ABEC$ est un parallélogramme donc on en déduit que $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}}$.

(b) En déduire que C est le milieu de $[DE]$.

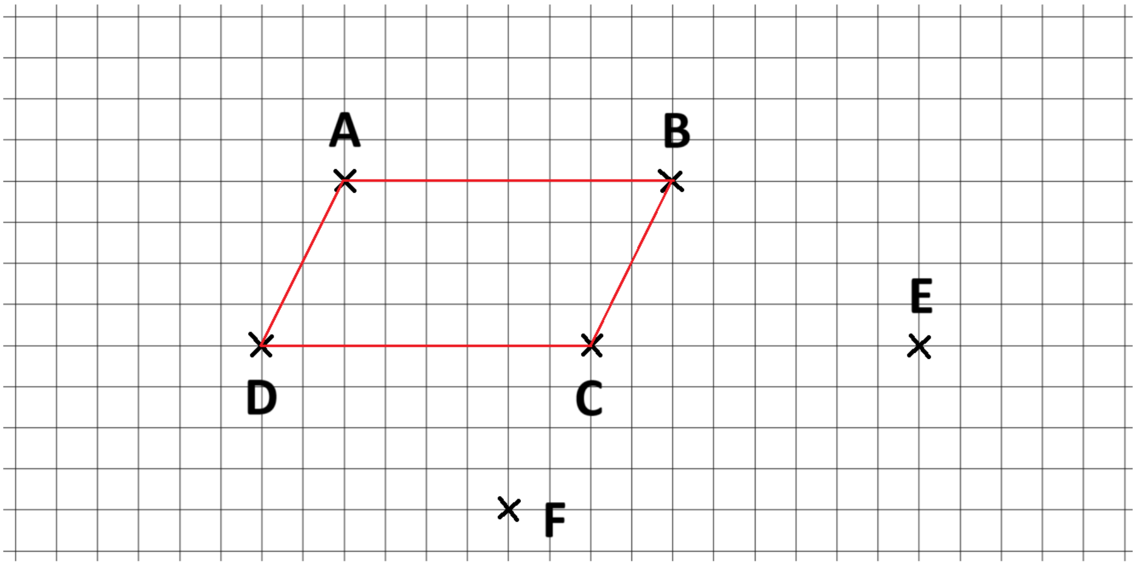
$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
D'après la question précédente, on a alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, on en déduit finalement que $\boxed{C \text{ est le milieu de } [DE]}$.

5. Démontrer de même que C est le milieu de $[BF]$.

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
De plus, F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$.
Ainsi, on en déduit que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$.
Finalement, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$ donc $\boxed{C \text{ est le milieu de } [BF]}$.

6. En déduire la nature du quadrilatère $BEFD$.

Les diagonales du quadrilatère $BEFD$ sont $[BF]$ et $[DE]$.
De plus, C est le milieu de $[BF]$ mais aussi le milieu de $[DE]$.
Ainsi, les diagonales du quadrilatère $BEFD$ se coupent en leur milieu donc $\boxed{BEFD \text{ est un parallélogramme}}$.



Exercice 3 - Vecteurs avec coordonnées (9 points)

On complètera la figure ci-dessous au fur et à mesure de l'exercice.

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $M(2;-1)$, $N(5;1)$ et $P(-2;5)$.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$.

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - x_M\\ y_N - y_M\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5-2\\ 1-(-1)\end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}x_P - x_N\\ y_P - y_N\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-2-5\\ 5-1\end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-7\\ 4\end{pmatrix}}$$

3. Calculer les longueurs MN, NP et MP.
Nous travaillons dans un repère orthonormé.

$$MN = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$NP = \sqrt{(-7)^2+4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

De plus,

$$\begin{aligned} MP &= \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}\\ &= \sqrt{(-2-2)^2 + (5-(-1))^2}\\ &= \sqrt{(-4)^2+6^2}\\ &= \sqrt{52}\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{MN = \sqrt{13}}$, $\boxed{NP = \sqrt{65}}$ et $\boxed{MP = \sqrt{52}}$.

4. Que peut-on en déduire pour le triangle MNP ? Justifier.
D'une part, $MN^2 + MP^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{52}\right)^2 = 13 + 52 = 65$.
D'autre part, $NP^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = 65$.
Ainsi, $MN^2 + MP^2 = NP^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
$\boxed{\text{le triangle } MNP \text{ est rectangle en } M}$.

5. Déterminer les coordonnées du point R tel que $MPRN$ soit un parallélogramme.
$MPRN$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NR}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NR} \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R - x_N \\ y_R - y_N \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2 - 2 = x_R - 5 \\ 5 - (-1) = y_R - 1 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_R = 1 \\ y_R = 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le point R a donc pour coordonnées $\boxed{R(1;7)}$.

6. Quelle est la nature précise du quadrilatère $MPRN$? Justifier.
$MPRN$ est un parallélogramme avec un angle droit.
Par conséquent, $\boxed{MPRN \text{ est un rectangle}}$.

7. **(Bonus)** Soient K le milieu du segment $[MP]$ et L le symétrique de K par rapport au milieu Ω de $[NP]$.
Que peut-on dire des points N, L et R ? Justifier.