Correction Devoir Surveillé N°1 (55min)

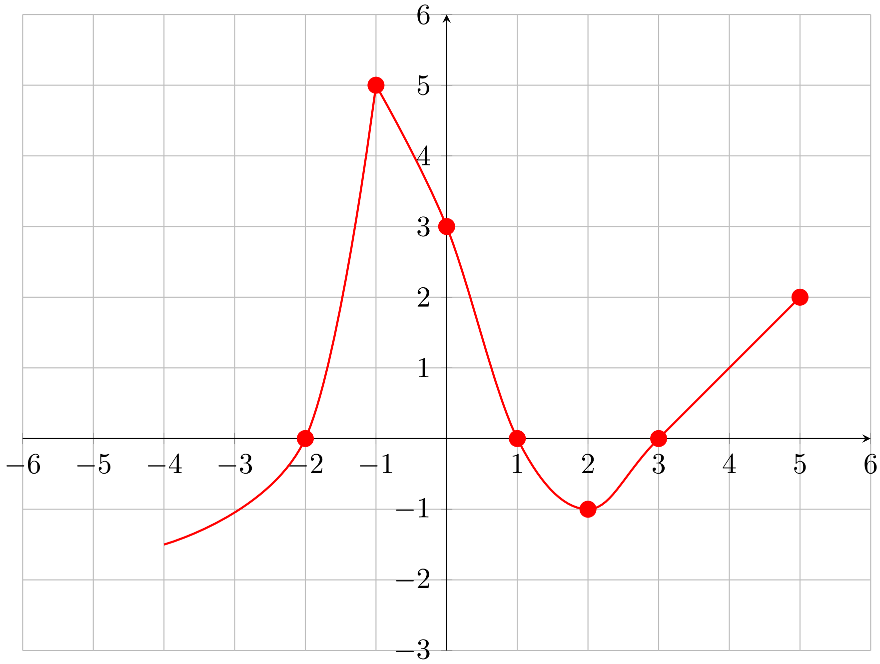
Dans tout le devoir, un soin particulier doit être apporté à la rédaction et aux justifications.

Exercice 1 (3 points)

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;5]$ vérifiant les contraintes suivantes :

- $f(0) = 3$.
- L'image de 5 par la fonction f est 2.
- Les antécédents de 0 par la fonction f sont -2, 1 et 3.
- Le maximum de la fonction f est 5. Il est atteint en $x = -1$.

Tracer une courbe représentant la fonction f.



Exercice 2 (3 points)

On considère les intervalles suivants :

$$A =]2;+\infty[\qquad B =]-\infty;3] \qquad C =]-5;1]$$

Déterminer les ensembles suivants :

1. $A \cap B =]2;3]$

2. $A \cup B =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

3. $A \cap C = \varnothing$

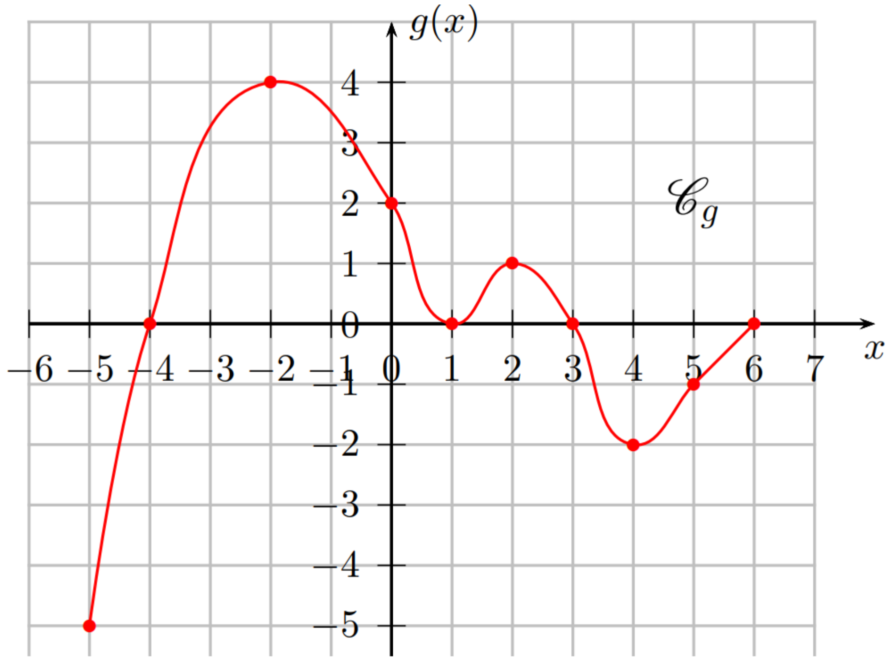
4. $A \cup C =]-5;1] \cup]2;+\infty[$

5. $B \cap C =]-5;1]$

6. $B \cup C =]-\infty;3]$

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
L'ensemble de définition de la fonction g est $[-5; 6]$.

2. Quelle est l'image de 4 par la fonction g ?
L'image de 4 par la fonction g est -2.

3. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?
Les antécédents de 0 par la fonction g sont -4, 1, 3 et 6.

4. Quel est le maximum de la fonction g ? En quelle valeur est-il atteint ?
Le maximum de la fonction g est 4.
Il est atteint en $x = -2$.

5. Donner l'ensemble E des réels qui ont une image positive ou nulle par la fonction g.
$E = [-4; 3] \cup \{6\}$

6. Donner l'ensemble F des réels qui ont exactement 3 antécédents par la fonction g.
$F =]-2; 0[\cup \{1\}$

7. A quel intervalle appartient $g(x)$ si x appartient à l'intervalle $[1; 4]$?
Si x appartient à l'intervalle $[1; 4]$, alors $g(x)$ appartient à l'intervalle $[-2; 1]$.

8. On a $g(2) = 1$. Écrire trois phrases traduisant cette égalité, l'une utilisant le mot « *image* », une autre utilisant le mot « *antécédent* » et enfin la dernière utilisant le mot « *courbe représentative* ».
L'image de 2 par la fonction g est 1.
Un antécédent de 1 par la fonction g est 2.
La courbe représentative de la fonction g passe par le point de coordonnées $A(2; 1)$.

Exercice 4 (2 points)

Compléter chaque case du tableau ci-dessous à l'aide d'un des symboles $\in$ ou $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-2	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{16}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\dfrac{23}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$-3,5$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$5\sqrt{2}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\dfrac{3}{5}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
11	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\dfrac{18}{\sqrt{36}}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

Exercice 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$.

1. Déterminer l'image de -1 par la fonction f.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 12 \\ &= 2 \times 1 - 5 - 12 \\ &= -15 \end{aligned}$$

L'image de -1 par la fonction f est -15.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (2x - 3)(x + 4)$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (2x-3)(x+4) &= 2x \times x + 2x \times 4 - 3 \times x - 3 \times 4 \\ &= 2x^2 + 8x - 3x - 12 \\ &= 2x^2 + 5x - 12 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.
On résout l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2x-3)(x+4) = 0 \\ &\iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \\ &\iff 2x = 3 \text{ ou } x = -4 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par la fonction f sont -4 et $\dfrac{3}{2}$.

4. Démontrer que le point $A($  $;-12)$ est un point de la courbe représentative de la fonction f.

M. NICOLAS a malencontreusement renversé du café sur l'énoncé de la dernière question.
En justifiant votre raisonnement, déterminer les éventuelles valeurs qui pourraient se cacher sous cette tâche de café.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.
Nous allons chercher les antécédents de -12 par la fonction f. Pour cela, on résout l'équation $f(x)=-12$.

$$\begin{aligned}
f(x)=-12 &\iff 2x^2+5x-12=-12\\
&\iff 2x^2+5x=0\\
&\iff x(2x+5)=0\\
&\iff x=0 \text{ ou } 2x+5=0\\
&\iff x=0 \text{ ou } 2x=-5\\
&\iff x=0 \text{ ou } x=-\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Sous la tâche de café, il pouvait y avoir les valeurs $-\frac{5}{2}$ ou 0.