

Exercice 3

$$\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = \text{longueur} \times \text{largeur} = 2(x+1) = 2x+2$$

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{5x}{2}$$

On cherche les valeurs de x telles que $\mathcal{A}_{\text{triangle}} > \mathcal{A}_{\text{rectangle}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{triangle}} > \mathcal{A}_{\text{rectangle}} &\iff \frac{5x}{2} > 2x+2 \\ &\iff 5x > 2(2x+2) \\ &\iff 5x > 4x+4 \\ &\iff 5x-4x > 4 \\ &\iff x > 4 \end{aligned}$$

En conclusion, l'aire du triangle est supérieure à celle du rectangle lorsque $x > 4$.

Exercice 6

Partie A

1. Pour que la figure soit possible, il faut avoir $x \in [0; 6]$.
- 2.

$$\mathcal{A}_{\text{ADM}} = \frac{AD \times AM}{2} = \frac{6 \times x}{2} = 3x$$

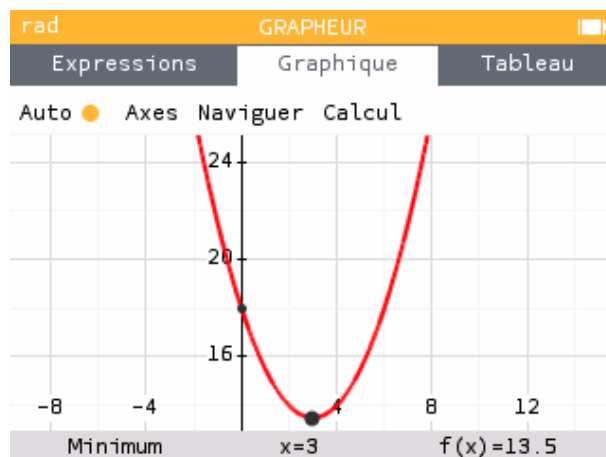
$$\mathcal{A}_{\text{BMN}} = \frac{BM \times BN}{2} = \frac{(6-x) \times x}{2} = 3x - 0,5x^2$$

$$\mathcal{A}_{\text{CDN}} = \frac{CD \times DN}{2} = \frac{6 \times (6-x)}{2} = 18 - 3x$$

L'aire du triangle MND est difficile à calculer directement mais on peut s'aider des aires calculées précédemment.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{MND}} &= \mathcal{A}_{\text{ABCD}} - (\mathcal{A}_{\text{ADM}} + \mathcal{A}_{\text{BMN}} + \mathcal{A}_{\text{CDN}}) \\ &= 6 \times 6 - (3x + 3x - 0,5x^2 + 18 - 3x) \\ &= 36 - (-0,5x^2 + 3x + 18) \\ &= 36 + 0,5x^2 - 3x - 18 \\ &= 0,5x^2 - 3x + 18 \end{aligned}$$

3. (a)



A l'aide de la calculatrice, il semblerait que la fonction f soit décroissante sur $[0; 3]$ puis croissante sur $[3; 6]$. L'aire du triangle MND serait alors minimale lorsque $x = 3$ cm et vaudrait $13,5 \text{ cm}^2$.

(b) D'une part,

$$\begin{aligned}f(x) - f(3) &= 0,5x^2 - 3x + 18 - (0,5 \times 3^2 - 3 \times 3 + 18) \\&= 0,5x^2 - 3x + 18 - (0,5 \times 9 - 9 + 18) \\&= 0,5x^2 - 3x + 18 - 4,5 \\&= 0,5x^2 - 3x + 13,5\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{(x-3)^2}{2} &= \frac{x^2 - 6x + 9}{2} \\&= 0,5x^2 - 3x + 4,5\end{aligned}$$

On obtient les mêmes résultats donc on a bien $f(x) - f(3) = \frac{(x-3)^2}{2}$.

(c) Un carré est toujours positif donc $\frac{(x-3)^2}{2} \geq 0$.

On en déduit que $f(x) - f(3) \geq 0$ et donc que $f(x) \geq f(3)$.

Ainsi, peu importe la valeur de x que l'on choisit, on aura toujours $f(x) \geq f(3)$ donc l'aire minimale du triangle MND est bien atteinte lorsque $x = 3$.

Partie B

1. Le triangle CDN est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}DN^2 &= CD^2 + CN^2 \\&= 6^2 + (6-x)^2 \\&= 36 + 36 - 12x + x^2 \\&= x^2 - 12x + 72\end{aligned}$$

Le triangle ADM est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}DM^2 &= AD^2 + AM^2 \\&= 6^2 + x^2 \\&= x^2 + 36\end{aligned}$$

Le triangle BMN est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}MN^2 &= MN^2 + BM^2 \\&= x^2 + (6-x)^2 \\&= x^2 + 36 - 12x + x^2 \\&= 2x^2 - 12x + 36\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}x^2 + 36 = x^2 - 12x + 72 &\iff 12x = 36 \\&\iff x = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 12x + 72 = 2x^2 - 12x + 36 &\iff -x^2 = -36 \\&\iff x^2 = 36 \\&\iff x = 6 \text{ ou } x = -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + 36 = 2x^2 - 12x + 36 &\iff -x^2 + 12x = 0 \\&\iff x(-x + 12) = 0 \\&\iff x = 0 \text{ ou } -x + 12 = 0 \\&\iff x = 0 \text{ ou } x = 12\end{aligned}$$

3. Le triangle MND est isocèle en D si, et seulement si, $DN^2 = DM^2$ donc lorsque $x^2 + 36 = x^2 - 12x + 72$, c'est-à-dire lorsque $x = 3$ cm d'après la question précédente.
- Le triangle MND est isocèle en N si, et seulement si, $DN^2 = MN^2$ donc lorsque $x^2 - 12x + 72 = 2x^2 - 12x + 36$, c'est-à-dire lorsque $x = 6$ cm d'après la question précédente (car $x = -6$ est impossible)
- Le triangle MND est isocèle en M si, et seulement si, $DM^2 = MN^2$ donc lorsque $x^2 + 36 = 2x^2 - 12x + 36$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ cm d'après la question précédente (car $x = 12$ est impossible).

Il n'existe aucune valeur de x telle que $DN = DM = MN$ donc le triangle MND ne peut pas être équilatéral.