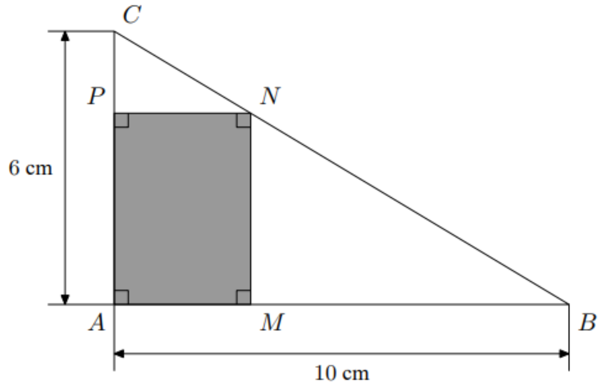
Quelques exercices de modélisation

Exercice 2 *Seconde/Fonctions-Généralités/exo-024/texte*

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 10\,\text{cm}$ et $AC = 6\,\text{cm}$ et M un point mobile sur $[AB]$. On construit N et P respectivement sur $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $AMNP$ soit un rectangle.



1. On pose $AM = x$. Dans quel intervalle, noté I, varie x ?

2. a) Exprimer MN en fonction de x puis établir que l'aire du rectangle $AMNP$ est donnée, en cm^2, par :

$$\mathscr{A}_{AMNP} = 6x - 0{,}6x^2$$

b) Est-il possible que le rectangle $AMNP$ soit un carré ? Si oui, préciser dans quel(s) cas.

3. Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par :

$$f(x) = 6x - 0{,}6x^2$$

a) Donner l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

b) Conjecturer le tableau de variations de f puis émettre une hypothèse concernant la position du point M qui maximise l'aire du rectangle $AMNP$.

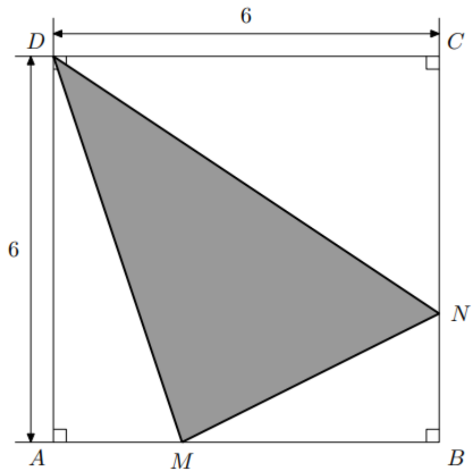
c) En développant chacune des deux expressions, établir que, pour tout x appartenant à $[0; 10]$:

$$f(5) - f(x) = 0{,}6(x-5)^2$$

d) Expliquer en quoi l'égalité démontrée dans la question précédente permet de valider l'hypothèse émise à la question **3b**.

Exercice 6 *Seconde/Fonctions-Généralités/exo-063/texte*

On considère un carré $ABCD$ de côté 6 cm, M et N deux points mobiles respectivement sur $[AB]$ et $[BC]$ tels que $AM = BN$.



Partie A

1. On pose $AM = x$. Dans quel intervalle, noté I, varie x ?

2. Exprimer en fonction de x l'aire des triangles ADM, BMN et CDN puis prouver que l'aire du triangle MND est donnée, en cm^2, par $0{,}5x^2 - 3x + 18$.

3. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 18$.

a) Utiliser la calculatrice pour conjecturer les variations de f sur I et émettre une hypothèse concernant la position de M telle que l'aire du triangle MND soit la plus petite possible.

b) En développant séparément les deux membres de l'égalité, établir que pour tout x appartenant à I :

$$f(x) - f(3) = \frac{(x-3)^2}{2}$$

c) En déduire la valeur exacte en laquelle la fonction f atteint son minimum sur I puis déterminer la position de M telle que l'aire du triangle MND soit la plus petite possible.

Partie B

1. Prouver que $DN^2 = x^2 - 12x + 72$ puis exprimer DM^2 et MN^2 en fonction de x.

2. Résoudre algébriquement chacune des équations suivantes :

a) $x^2 + 36 = x^2 - 12x + 72$;

b) $x^2 - 12x + 72 = 2x^2 - 12x + 36$;

c) $x^2 + 36 = 2x^2 - 12x + 36$.

3. Est-il possible que le triangle MND soit isocèle ? équilatéral ?

Exercice 3

Existe-t-il des valeurs de x telles que l'aire du triangle EFG soit plus grande que celle du rectangle $ABCD$? Si oui, quelles sont-elles ?