

**Exercice 1.**

$x$	$-\infty$		$-4$		$3$		$+\infty$	
$x - 3$		$-$		$-$	$0$		$+$	$m=1>0$
$4 + x$		$-$	$0$		$+$		$+$	$m=1>0$
$(x - 3)(4 + x)$		$+$	$0$		$-$	$0$	$+$	

En conclusion,

$$(x - 3)(4 + x) \geq 0 \iff x \in ]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[$$

$$8x^2 < 3x \iff 8x^2 - 3x < 0$$

$$\iff x(8x - 3) < 0$$

$x$	$-\infty$		$0$		$\frac{3}{8}$		$+\infty$	
$x$		$-$	$0$		$+$		$+$	$m=1>0$
$8x - 3$		$-$		$-$	$0$		$+$	$m=8>0$
$x(8x - 3)$		$+$	$0$		$-$	$0$	$+$	

En conclusion,

$$8x^2 < 3x \iff x(8x - 3) < 0 \iff x \in \left] 0; \frac{3}{8} \right[$$

$$(x - 5)^2 \geq (3 - 2x)^2 \iff (x - 5)^2 - (3 - 2x)^2 \geq 0$$

$$\iff [(x - 5) + (3 - 2x)][(x - 5) - (3 - 2x)] \geq 0$$

$$\iff (-x - 2)(3x - 8) \geq 0$$

$x$	$-\infty$		$-2$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$	
$-x - 2$		$+$	$0$		$-$		$-$	$m=-1<0$
$3x - 8$		$-$		$-$	$0$		$+$	$m=3>0$
$(-x - 2)(3x - 8)$		$-$	$0$		$+$	$0$	$-$	

En conclusion,

$$(x - 5)^2 \geq (3 - 2x)^2 \iff (-x - 2)(x - 8) \geq 0 \iff x \in \left[ -2; \frac{8}{3} \right]$$

**Exercice 2.**

$$\frac{2 - 3x}{5 + x} > 1$$

$x = -5$  est une valeur interdite.

$$\frac{2 - 3x}{5 + x} > 1 \iff \frac{2 - 3x}{5 + x} - \frac{5 + x}{5 + x} > 0$$

$$\iff \frac{2 - 3x - (5 + x)}{5 + x} > 0$$

$$\iff \frac{-4x - 3}{5 + x} > 0$$

$x$	$-\infty$	$-5$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$		
$-4x - 3$		+	+	0	-	$m=-4<0$
$5 + x$		-	0	+	+	$m=1>0$
$\frac{-4x - 3}{5 + x}$		-	+	0	-	

En conclusion,

$$\frac{2-3x}{5+x} > 1 \iff \frac{-4x-3}{5+x} > 0 \iff x \in \left] -5; -\frac{3}{4} \right[$$

$$\frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1}$$

$x = -1$  et  $x = 2$  sont des valeurs interdites.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1} &\iff \frac{2}{x-2} \times \frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} \times \frac{x-2}{x-2} < 0 \\ &\iff \frac{2x+2-(3x-6)}{(x+1)(x-2)} < 0 \\ &\iff \frac{-x+8}{(x+1)(x-2)} < 0 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$8$	$+\infty$		
$-x + 8$		+	+	+	0	-	$m=-1<0$
$x + 1$		-	0	+	+	+	$m=1>0$
$x - 2$		-	-	0	+	+	$m=1>0$
$\frac{-x + 8}{(x + 1)(x - 2)}$		+	-	+	0	-	

En conclusion,

$$\frac{2}{x-2} < \frac{3}{x+1} \iff \frac{-x+8}{(x+1)(x-2)} < 0 \iff x \in ]-1; 2[ \cup ]8; +\infty[$$

### Exercice 3.

①

$$\begin{aligned} 2 \left[ \left( x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{121}{16} \right] &= 2 \left( x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{121}{16} \right) \\ &= 2x^2 - 5x - 12 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left[ \left( x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{121}{16} \right] \\ &= 2 \left[ \left( x - \frac{5}{4} \right)^2 - \left( \frac{11}{4} \right)^2 \right] \\ &= 2 \left( x - \frac{5}{4} + \frac{11}{4} \right) \left( x - \frac{5}{4} - \frac{11}{4} \right) \\ &= 2 \left( x + \frac{3}{2} \right) (x - 4) \end{aligned}$$

②

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$4$	$+\infty$		
$2$		$+$	$+$	$+$		
$x + \frac{3}{2}$		$-$	$0$	$+$	$m=1>0$	
$x - 4$		$-$	$-$	$0$	$m=1>0$	
$2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

En conclusion,

$$f(x) \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{3}{2}; 4\right]$$

#### Exercice 4.

On pose  $AE = x$ . Pour que la figure soit réalisable, il faut que  $0 \leq x \leq 10$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{grise}} &= \mathcal{A}_{AGFE} + \mathcal{A}_{FICH} \\ &= x \times x + (10 - x) \times (10 - x) \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'indication de l'énoncé, on remarque que :

$$\begin{aligned} (2x - 6)(x - 7) &= 2x^2 - 14x - 6x + 42 \\ &= 2x^2 - 20x + 42 \end{aligned}$$

Par conséquent, déterminer les positions de  $E$  pour lesquelles l'aire en grise est inférieure ou égale à  $58 \text{ cm}^2$  revient à résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{grise}} \leq 58 &\iff 2x^2 - 20x + 100 \leq 58 \\ &\iff 2x^2 - 20x + 42 \leq 0 \\ &\iff (2x - 6)(x - 7) \leq 0 \end{aligned}$$

On résout cette inéquation à l'aide d'un tableau de signes :

$x$	$0$	$3$	$7$	$10$		
$2x - 6$		$-$	$-$	$0$	$+$	$m=2>0$
$x - 7$		$-$	$0$	$+$	$+$	$m=1>0$
$(2x - 6)(x - 7)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

En conclusion, l'aire grise est inférieure ou égale à  $58 \text{ cm}^2$  lorsque  $x \in [3; 7]$ .

#### Exercice 5.

On développe le terme de droite :

$$\begin{aligned} (2x + 2)(3x + 3)(ax + b) &= (6x^2 + 6x + 6x + 6)(ax + b) \\ &= (6x^2 + 12x + 6)(ax + b) \\ &= 6ax^3 + 6bx^2 + 12ax^2 + 12bx + 6ax + 6b \\ &= 6ax^3 + (6b + 12a)x^2 + (12b + 6a)x + 6b \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient alors :

$$\begin{cases} 6 = 6a \\ 0 = 6b + 12a \\ -18 = 12b + 6a \\ -12 = 6b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

On obtient donc

$$6x^3 - 18x - 12 = (2x + 2)(3x + 3)(x - 2)$$

Pour étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , on étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  :

$$f(x) - g(x) = 6x^3 + 2x^2 + x + 1 - (2x^2 + 19x + 13) = 6x^3 - 18x - 12 = (2x + 2)(3x + 3)(x - 2)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$2x + 2$	-	0	+	+	$m=2>0$
$3x + 3$	-	0	+	+	$m=3>0$
$x - 2$	-	-	0	+	$m=1>0$
$(2x + 2)(3x + 3)(x - 2)$	-	0	-	0	+

En conclusion,

- Lorsque  $x \in ]2; +\infty[$ ,  $f(x) - g(x) > 0$  donc  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .
- Lorsque  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$ ,  $f(x) - g(x) < 0$  donc  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $\mathcal{C}_g$ .
- Lorsque  $x = -1$  et  $x = 2$ ,  $f(x) - g(x) = 0$  donc les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont confondues.

### Exercice 6.

① (a) Graphiquement,  $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -5,5$ .

(b)  $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{25}{4} - \frac{30}{2} = -\frac{45}{8}$

② (a) Graphiquement, les antécédents de 0 sont  $-2$ ,  $0$  et  $3$ .

(b)  $(x - 3)(x + 2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$

(c) On en déduit que  $f(x) = x(x^2 - x - 6) = x(x - 3)(x + 2)$ .

(d) On utilise la forme factorisée  $f(x) = x(x - 3)(x + 2)$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$3$	$+\infty$
$x$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

③ (a) Graphiquement,  $f(x) \geq -6$  lorsque  $x \in [-2, 5; 1] \cup [2, 5; +\infty[$ .

(b)  $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$  et  $-6x + 6 = -6(x - 1)$ .

(c)

$$\begin{aligned} f(x) \geq -6 &\iff x^3 - x^2 - 6x \geq -6 \\ &\iff x^3 - x^2 - 6x + 6 \geq 0 \\ &\iff x^2(x-1) - 6(x-1) \geq 0 \\ &\iff (x-1)(x^2 - 6) \geq 0 \\ &\iff (x-1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \geq 0 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$1$	$\sqrt{6}$	$+\infty$		
$x - 1$	-	-	0	+	+	$m=1 > 0$	
$x - \sqrt{6}$	-	-	-	0	+	$m=1 > 0$	
$x + \sqrt{6}$	-	0	+	+	+	$m=1 > 0$	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

En conclusion,

$$f(x) \geq -6 \iff x \in [-\sqrt{6}; 1] \cup [\sqrt{6}; +\infty[$$