Question de cours
Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1 (ECG 1ère année page 634)
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes?
5. Calculer la probabilité $P((X = k) \cap (Y = q))$ et $P(X = k)P(Y = q)$. Conclusion.

Exercice 2
Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer...
On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ème lancer ».

1. Calculer la probabilité de A_k et de B_k.
2. On suppose désormais que le jeu s'arrête après 10 lancers (cinq pour chaque joueur).
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
   (b) Le jouer B gagne.
   (c) Personne ne gagne.
   (d) On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Question de cours
Énoncer les lois discrètes usuelles du cours.

Exercice 1 (EML 2022)
Soit p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = q^k p = (1-p)^k p$$

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
3. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
from random import *

def simule_X(p):
    Y=..........
    while ..........
        Y=Y+1
    return(Y-1)
```

Exercice 2
Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t = 0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$. Si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$ et reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste.
On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n.
Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $v_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et b_n.
6. Que vaut c_n ?

Question de cours
Stabilité de la loi binomiale, énoncé et démonstration.

Exercice 1
On tire deux boules au hasard, une par une et sans remise, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer $S(\Omega)$ puis, pour tout k de $S(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(S \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de S.

Exercice 2
On lance trois dés à six faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (et similairement X_2 et X_3 pour les deux autres dés).

1. Quels sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?
2. Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour un entier k donné.
3. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6. Calculer $P(X \leqslant k)$ (on admettra que les évènements $(X_1 \leqslant k)$, $(X_2 \leqslant k)$ et $(X_3 \leqslant k)$ sont indépendants).
4. En déduire la loi de la variable X.
5. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Question de cours
Stabilité de la loi de Poisson, énoncé et démonstration.

Exercice 1 (ECG 1ère année page 385)
On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$P(X = 1) = \frac{1}{5} \quad P(X = e) = \frac{3}{5} \text{ et } P(X = e^2) = \frac{1}{5}$$

On pose $Y = \ln(X)$.

1. Calculer l'espérance de Y grâce au théorème de transfert.
2. Montrer que $\dfrac{1 + 3e + e^2}{5} \neq e$ et en déduire que $\ln(E(X)) \neq E(\ln(X))$.

Exercice 2
Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts.
Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$.
4. Démontrer que $P(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens puis en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{l-k} = \dbinom{n}{l}\dbinom{l}{k}$. En déduire que $P(Z = l) = \dbinom{n}{l} p^l (1 + q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaître la loi suivie par Z.

Question de cours
Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.

Exercice 1 (ECG 1ère année page 657)
On désigne par a un réel strictement positif et on considère une variable aléatoire X dont le support est $\mathbb{N}^*$ et qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n+1) = \frac{a}{n} P(X = n)$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)!P(X = n)$.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de a, n et $P(X = 1)$.
2. Utiliser le fait que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour déterminer $P(X = 1)$, puis donner la loi de X.
3. On pose $Y = X - 1$. Reconnaître la loi de Y, donner $E(Y)$ et $V(Y)$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2
Deux joueurs A et B effectuent une série de lancers de pièce jusqu'à obtenir un Pile avec une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $p \in [0; 1]$. On note X_A et X_B le nombre de tirages nécessaires pour chacun des joueurs.

1. Donner la loi de X_A et de X_B.
2. Calculer la probabilité d'avoir $X_A = X_B$.
3. Soit $k > 1$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$.
4. En déduire la probabilité que le joueur B effectue plus de lancers que le joueur A (c'est-à-dire $P(X_B > X_A)$).

Question de cours
Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice 1
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X=k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. Justifier que $P(X=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)\, P(N=n)$

3. Montrer que $P(X=k) = e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{m}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\lambda\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\right)^n$.

4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle).

5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 2
Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. En déduire une expression de p_n en fonction de n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.