Question de cours
Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1
Une boîte contient deux jetons : un noir et un rouge.
On tire n fois un jeton dans cette boîte en le remettant après avoir noté sa couleur.
On considère les événements :
A_n : « On obtient des jetons des deux couleurs au cours des n tirages »
B_n : « On obtient au plus un jeton noir »

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.

2. A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?

3. Même question si $n = 3$.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx$.

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx$$

3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{\ln(n)}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3}$$

4. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours
Énoncer le théorème de Bayes.

Exercice 1
Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules.
On considère les événements :

- E : « obtenir exactement 2 boules blanches »
- F : « obtenir exactement 2 boules rouges »

1. On suppose qu'il n'y a pas remise.
Calculer les probabilités $P(E \cap F)$, $P_F(E)$ et $P_E(F)$.
Les évènements E et F sont-ils indépendants ?

2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.

Exercice 2
On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)dt}$$

1. Justifier que I et J convergent.

2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, établir un lien entre I et J.

3. Calculer I et J.

Question de cours
Énoncer le théorème de la limite monotone en probabilités.

Exercice 1
Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% si cette personne est malade. Par contre, on obtient un faux positif pour $0,2\%$ des personnes saines.
Une personne a été testée positive, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 2
Le but de cet exercice est de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$ existe et la calculer.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et $v_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1. Justifier l'existence de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis calculer u_0 et u_1.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. **(a)** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant \ln(2)-u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. **(a)** Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n pour tout $n\geqslant 2$.

(b) Montrer que, pour tout $n\geqslant 2$, $0\leqslant v_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}$ puis conclure.

Question de cours
Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1
Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles non défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 2
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.

2. Calculer I_0.

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$.

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2}\pi$.

Question de cours

Énoncer le théorème de Bayes.

Exercice 1

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k, il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis, dans cette urne, on tire une boule au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé l'urne n sachant qu'on a tiré une boule blanche ?

Exercice 2

Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Vérifier que cette intégrale est bien convergente pour $x > 0$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ à l'aide d'un changement de variable.
5. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

Question de cours
Énoncer le théorème de la limite monotone en probabilités.

Exercice 1
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée qui amène Pile avec la probabilité p.
A commence. A gagne dès qu'il obtient Pile et le jeu s'arrête alors. B gagne dès qu'il obtient Face et le jeu s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son $n^{\text{ème}}$ lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête jamais ?
4. Quelle valeur faut-il donner à p pour que les deux joueurs aient tous deux les mêmes chances de gagner ?

Exercice 2
Montrer l'existence et calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx$$