**Question de cours**
Énoncer le critère de comparaison par majoration pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

**Exercice 2**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

**Exercice 3**
Pour tout entier naturel $n$, on définit la fonction $f_n$ de la variable réelle $x$ par $f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

**1.** Justifier que $f_n$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

**2.** Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

**3.** On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

**(a)** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

**(b)** Démontrer que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

**(c)** Calculer $I_1$.

**(d)** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

**Question de cours**
Énoncer le critère de comparaison par équivalence pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

**Exercice 2**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$$

**Exercice 3**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale suivante et déterminer sa valeur :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

3. Que peut-on en déduire sur $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ ?

**Question de cours**
Énoncer le critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$$

**Exercice 2**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx$$

**Exercice 3**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Quel est le sens de variation de $f$ ?
3. On admet que $f$ est une fonction continue sur son ensemble de définition.
   Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$ et en déduire la limite de $f$ en $0$ et en $+\infty$.

**Question de cours**

Énoncer le critère de comparaison par majoration pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**

Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} 1 dt$$

**Exercice 2**

Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(x)}{x+4} dx$$

**Exercice 3**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. En utilisant le critère de négligeabilité, montrer que cette intégrale converge quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $I_0$.
3. Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
4. En déduire la valeur de $I_n$.
5. A l'aide d'un changement de variable, montrer la convergence et calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-2u} du$$

**Question de cours**
Énoncer le critère de comparaison par équivalence pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$$

**Exercice 2**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_1^2 \frac{1}{t^2 - t} dt$$

**Exercice 3**
Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

**1.** Vérifier que cette intégrale est bien convergente pour $x > 0$.

**2.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

**3.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

**4.** On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide d'un changement de variable.

**5.** En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

**Question de cours**
Énoncer le critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales impropres de fonctions continues positives.

**Exercice 1**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente et, le cas échéant, calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

**Exercice 2**
Déterminer si l'intégrale suivante est convergente.

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}dx$$

**Exercice 3**
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^2)^2} = 0$ et en déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ converge.
2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt = -\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $I$.