Question de cours
Stabilité de lois usuelles. Énoncé et démonstration (pour la loi de Poisson).

Exercice 1
Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne.
On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).

2. En déduire la loi de Z.

Exercice 2 (EDHEC 2006)
Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. Montrer que f admet un minimum local et donner la valeur m de ce minimum.

2. Développer $2\left(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$ et en déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.

(a) En utilisant ce qui précède, établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.

(b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Question de cours
Définition d'un point critique et théorème concernant les extremums locaux d'une fonction de deux variables.

Exercice 1
Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou R : par exemple si les lancers donnent les résultats BBRRRRRRBBBRR... alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième série $(RRRRRR)$ est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.

2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

3. En déduire la loi de X_2.

4. En considérant $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 2
Déterminer les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$.

Question de cours
Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.

Exercice 1
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).

2. Calculer $P(X=Y)$.

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 2 (EDHEC 2005)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. **(a)** Déterminer les dérivées partielles premières de f.

(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A(-1,0)$.

3. **(a)** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

(b) Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. **(a)** Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geqslant xe^x$.

(b) En étudiant la fonction $g : x \mapsto xe^x$, conclure que l'extremum trouvé précédemment est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Question de cours

Théorème sur les conditions suffisantes d'existence d'un extremum d'une fonction $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert pour une fonction de deux variables.

Exercice 1

Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$, de la façon suivante :

— Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois.
  On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.

— Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance n fois sa pièce.

On appelle alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ et on pourra noter $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de N.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X.

3. En déduire la loi de X.

4. On considère B et G deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle BG.

   (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.

   (c) En déduire $E(X)$.

Exercice 2 (ECRICOME 2007)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ par $g(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ dont on précisera la nature.

Question de cours

Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

— 1 boule numérotée 1,

— 2 boules numérotées 2,

— $\dots$

— n boules numérotées n.

1. On tire une boule dans cette urne et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.

(a) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).

(b) En déduire la loi des variables aléatoires T_1 et T_2.

(c) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

(d) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 2 (EDHEC 1998)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

(a) Étudier les variations de g et déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

(b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0; \frac{1}{e}[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

(a) Déterminer le seul point critique de f.

(b) Vérifier que f présente un minimum local m en ce point.

(c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$.

Question de cours
Théorème de Schwarz pour les fonctions de deux variables.

Exercice 1
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (EML 2004)
On considère la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;1[\times]0;1[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0;1[\times]0;1[\,,\ f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x, y) \in]0;1[\times]0;1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0;1[\times]0;1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3. Montrer que f admet en I un minimum local.