Question de cours
Théorème sur les conditions suffisantes d'existence d'un extremum d'une fonction $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert pour une fonction de deux variables.

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + 2e^x$.
On considère également la fonction g des deux variables réelles x et y définie par $g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$.

1. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2; -1]$, tel que $f(\alpha) = 0$.
2. (a) Déterminer le seul point critique de g.
   (b) Vérifier que g présente un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
   (c) Montrer que l'on a $4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$.

Question de cours

Théorème de Schwarz pour les fonctions de deux variables.

Exercice 1

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise).
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

Exercice 2

1. On considère l'application g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, notée α, et que $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
2. On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $F(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que F admet un unique point critique que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.
   (c) Est-ce que F admet un extremum local ?

Question de cours
Loi exponentielle, définition, propriétés.

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

Exercice 2
On considère la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;1[\times]0;1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[\,,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in]0;1[\times]0;1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0;1[\times]0;1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3. Montrer que f admet en I un minimum local.

Question de cours

Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Exercice 1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au k}^{\text{ème}}\text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$.
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

5. En déduire $E(Y)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$.
Déterminer le domaine de définition de f puis ses extremums locaux.

Question de cours
Théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité.

Exercice 1
Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est $0,25$.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   - **(a)** Déterminer la loi de probabilité de X, l'espérance et la variance de X.
   - **(b)** Calculer la probabilité de l'événement : le client a subit au moins un retard.
2. Au cours des années 2020 et 2021 le service après-vente enregistre une succession d'appels.
   Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2020 (resp. 2021) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).
   - **(a)** Déterminer les lois de Y et Z.
   - **(b)** Calculer $P(Y \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   - **(c)** On pose $T = \max(Y, Z)$.
     - **i.** Calculer $P(T \leqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
     - **ii.** Déterminer la loi de T.
     - **iii.** Calculer l'espérance de T.

Exercice 2
Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

Question de cours

Loi normale, définition, propriétés.

Exercice 1

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. **(a)** Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

(a) M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et T_B.

(b) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$$P(M \leqslant t) = \begin{cases} 1-(1+t)^2e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(c) Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.
Déterminer le point critique de f et prouver que f atteint un minimum en ce point.