Question de cours
Énoncer le critère de convergence des séries par équivalence. Donner un exemple.

Python
Écrire une fonction Python `somme` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la somme

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Exercice 1
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y.

3. Calculer l'espérance de la variable Y.

Exercice 2
On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Déterminer la nature de la suite de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.

3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Question de cours
Énoncer le critère de convergence des séries par équivalence. Donner un exemple.

Python
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 3$.
Écrire une fonction Python `terme` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n.

Exercice 1
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

Exercice 2
Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ la somme d'ordre n de la série harmonique.

1. Quelle est la limite de (H_n) ?
2. On cherche un équivalent de H_n.
   - **(a)** Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t} dt \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ et en déduire que $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_{n+1}$.
   - **(b)** En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   - **(a)** Montrer que la série de terme général v_n converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge.
   - **(b)** Montrer que la série de terme général v_n converge.
   - **(c)** Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))$ converge vers une constante.

Question de cours

Énoncer le critère de convergence des séries par négligeabilité. Donner un exemple.

Python

Écrire une fonction Python `factorielle` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de $n!$.

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$

   (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

   (b) Vérifier que, pour tout réel x, on a : $f(x) = 1 - f'(x) - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

   (c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et donner sa valeur.

2. (a) Soit α un réel et g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Déterminer α pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

   (b) La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ?

Exercice 2

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$.

2. En sommant la relation obtenue, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   et en déduire la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$ lorsque $n \to +\infty$.

4. Prouver que $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et déterminer sa somme.

Question de cours
Définition d'une densité de probabilité.

Python
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.
On admet que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Écrire une fonction Python `seuil` qui renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

Exercice 1
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n°1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X=k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)\, P(N=n)$
3. Montrer que $P(X=k) = e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{m}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\lambda\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle).
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 2

1. Trouver trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. En déduire la nature et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Question de cours
Loi exponentielle, définition, propriétés.

Python
Écrire une fonction Python `somme` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la somme

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

Exercice 1
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X+Y=N$.

1. Calculer, pour tout $n,k\in\mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X=k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X=k)\cap(Y=q))$ et $P(X=k)P(Y=q)$. Conclusion.

Exercice 2
Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n=\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

Question de cours
Loi uniforme à densité, définition, propriétés.

Python
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On admet que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Écrire une fonction Python `seuil` qui renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

Exercice 1 (Une caractérisation de la loi géométrique)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $h \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{(X>n)}(X > n + h) = P(X > h)$$

On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.

2. Réciproquement, on suppose que la condition (1) est vérifiée.

(a) Montrer que la suite $(P(X > n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = P(X > 1)$.

(b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 2
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

2. En posant $v_n = \ln(u_n)$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.

3. En déduire la nature de $\sum u_n$.