Question de cours
Expliquer comment on peut déterminer une formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 1
On s'intéresse à la suite d'intégrales définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 2
Dans chaque cas, déterminer toutes les racines réelles de P ainsi que la forme factorisée de $P(x)$ en produits de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

1. $P(X) = X^3 - 8$
2. $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$
3. $P(X) = 8X^4 + 10X^2 - 12$

Question de cours

Énoncer la formule d'intégration par parties avec un exemple de calcul d'intégrale où elle s'avère utile.

Exercice 1

On définit deux suites d'intégrales, pour $n \geqslant 1$, de la façon suivante :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

1. Calculer J_1 et montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2. En déduire la limite de (J_n).

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}J_{n+2}$.

4. En déduire la convergence et la limite de (I_n).

5. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme $P(X) = 2X^2 - 3X + 1$ est annulateur de M.

2. Montrer que M est inversible et exprimer son inverse M^{-1} en fonction de M.

3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le reste R_n de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.

4. Déterminer M^n.

Question de cours
Expliquer comment on peut déterminer une formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 1
Effectuer la division euclidienne de P par Q avec :

$$P(X) = 3X^3 - 5X^2 + X + 2 \qquad \text{et} \qquad Q(X) = X - 2$$

Exercice 2 (EMLyon 2021)
Soit x un réel appartenant à $[0;1[$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0;x]$,

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$$

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

4. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Question de cours
Donner un maximum de méthodes que vous avez rencontrées et qui peuvent être utilisées pour calculer une intégrale.

Exercice 1
Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire la tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'inéquation $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 6 > 0$.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

5. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$$

et en déduire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Question de cours
Énoncer la formule d'intégration par parties avec un exemple de calcul d'intégrale où elle s'avère utile.

Exercice 1
On admet que
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

2. Justifier que
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt$$

3. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2
On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A.
2. Montrer que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A.
3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le reste R_n de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
4. Déterminer A^n.

Question de cours

Donner un maximum de méthodes que vous avez rencontrées et qui peuvent être utilisées pour calculer une intégrale.

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de P par Q avec :

$$P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 \qquad \text{et} \qquad Q(X) = X^2 - 5X + 4$$

Exercice 2

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale

$$I_n = \int_1^e x^2 \left(\ln(x)\right)^n dx$$

1. Calculer I_1.

2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$ et en déduire le sens de variation de la suite (I_n).

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$ et en déduire la limite de la suite (I_n).

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$ et en déduire un équivalent de I_n.