Question de cours

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Donner la définition d'une application injective, surjective et bijective.
2. Donner un exemple d'application :
   (a) bijective.
   (b) injective mais pas surjective.
   (c) surjective mais pas injective.

Exercice 1

Un épargnant place une somme de 3000 euros sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés. Qui plus est, ce même épargnant rajoute chaque année un placement ponctuel de 1000 euros supplémentaires sur ce même compte. On note u_n la somme épargnée au bout de n années.

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), en déduire de quel type de suite il s'agit, puis déterminer la valeur de u_n en fonction de n. Au bout de combien de temps notre épargnant disposera-t-il de 30000 euros ? Combien aura-t-il alors déposé au total sur ce compte ?

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I)^3$.
2. Déduire de la question précédente que A est inversible et calculer son inverse.

Question de cours

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Donner la définition d'une application injective, surjective et bijective.
2. Donner un exemple d'application :
   (a) bijective.
   (b) injective mais pas surjective.
   (c) surjective mais pas injective.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que u_n est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. En déduire les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & m \\ -2x + 3y + 4z & = & 1 \\ y + z & = & 2m \end{array} \right.$$

Question de cours
Écrire un script Python permettant de calculer :

1. une factorielle.
2. un coefficient binomial.

Exercice 1
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs du paramètre t cette matrice est-elle inversible ?
Dans ce cas, déterminer son inverse.

Question de cours
Écrire un script Python permettant de calculer :

1. une factorielle.
2. un coefficient binomial.

Exercice 1
On considère la matrice suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition ci-dessus, déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Déterminer si f est injective, surjective, bijective.

Question de cours

Expliquer comment on peut déterminer une formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 1

On considère les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer J^n puis A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Étudier les variations, déterminer les limites, puis tracer le graphe de la fonction f.

2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3. Déterminer la fonction réciproque de f.

Question de cours
Expliquer comment on peut déterminer une formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Exercice 1
On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer si la matrice B est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.

Exercice 2
On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite (p_n) est géométrique.
   En déduire une expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. On considère la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$.
   Montrer que la suite (z_n) est arithmétique.
   En déduire une expression de z_n en fonction de n.
4. En déduire finalement l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.