Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions

1. Vocabulaire des fonctions

1. 1. Définitions

Définition 1.

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre x associe **un unique** nombre y.

- x s'appelle la **variable**.
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
- x est **un antécédent** de y par la fonction f.
- f est la **fonction** et on note $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$.

Exemple 1.

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 3$.

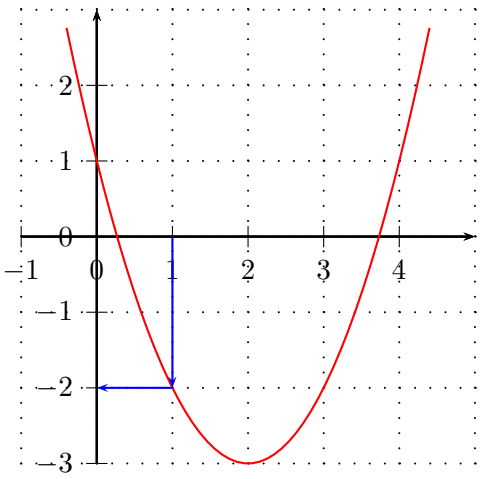
- L'image de 5 est $g(5) = 5^2 + 3 = 28$,
- Les antécédents de 7 vérifient $g(x) = 7$ c'est-à-dire $x^2 + 3 = 7$ soit $x = 2$ ou $x = -2$,
- Il n'y a pas d'antécédent de 1 car l'équation $g(x) = 1$ n'a pas de solution : $x^2 + 3 = 1 \iff x^2 = -2$.
  Un carré est toujours positif donc cette équation n'admet pas de solution.

Remarque 1.

- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Méthode pour lire une image ou un antécédent à partir d'une courbe :

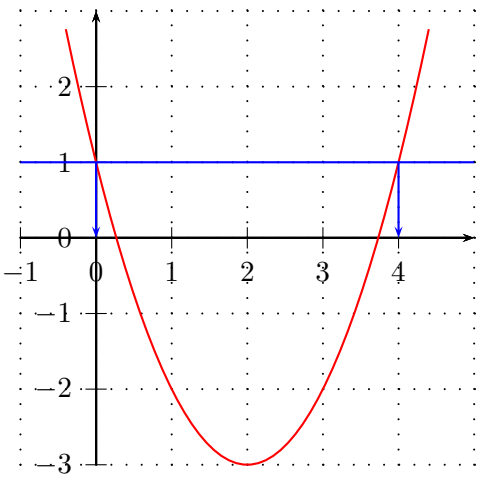
Lire l'image d'un nombre :



on place x sur l'axe des abscisses
on se déplace verticalement pour rencontrer $\mathscr{C}_f$
on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées

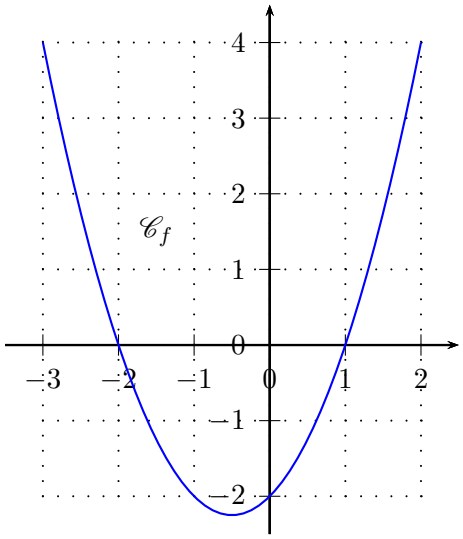
L'image de 1 par la fonction f est -2.

Trouver l'(les)antécédent(s) d'un nombre



on trace une horizontale passant par cette valeur
à partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents
Les antécédents de 1 par la fonction f sont 0 et 4.

1. 2. Courbe représentative



Exemple 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.
Tracer la courbe représentative de la fonction f.

On commence par compléter un tableau de valeurs :
$f(-3) = (-3)^2 - 3 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$
$f(-2) = (-2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$
...

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	0	-2	-2	0	4

On place les différents points dans le repère ci-contre et on les relie pour obtenir la courbe représentative de la fonction f.

2. Exemple : Étude d'un bénéfice

Une entreprise produit et vend des stylos.
Pour l'entreprise, la production quotidienne de stylos engendre un coût total, noté $C(x)$ composé de coûts fixes (salaires et matériaux) et d'un coût variable proportionnel au nombre x de stylos vendus.
Chaque stylo est vendu 2,50€. La recette correspondante est notée $R(x)$.
Le bénéfice, noté $B(x)$ est la différence entre la recette et le coût total.

① Donner l'expression de la recette en fonction de x.

② (a) Le coût total est donné par la formule $C(x) = 1,25x + 180$.
Quels sont les coûts fixes ?

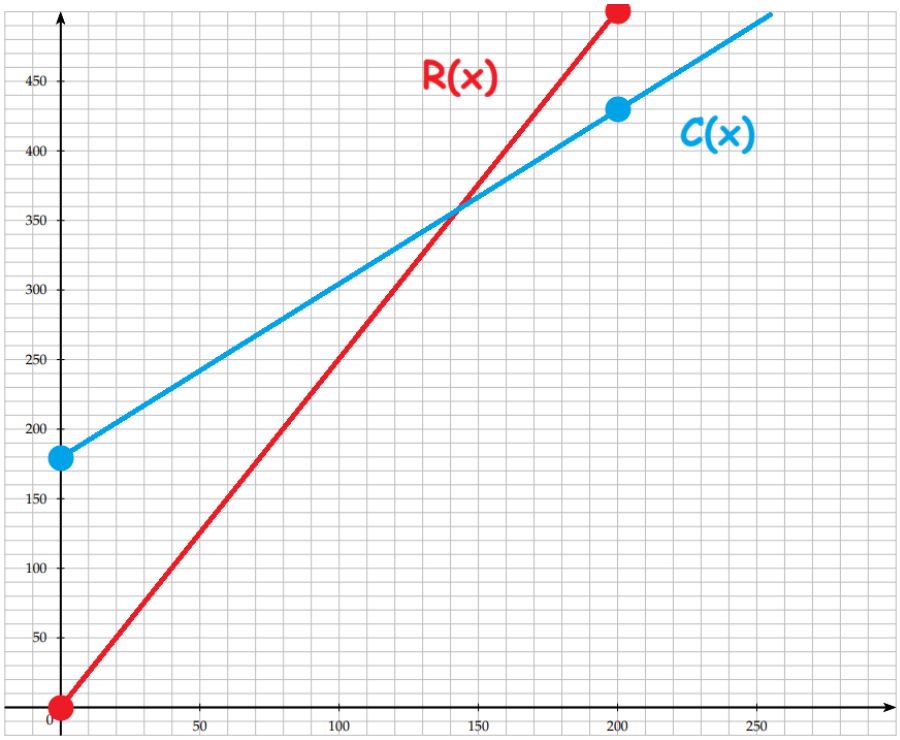
(b) Exprimer le bénéfice en fonction de x.

③ Calculer $R(200)$, $C(200)$ et $B(200)$. Que peut-on en déduire ?

④ Combien de stylos doit fabriquer l'entreprise pour que le coût total s'élève à 600€ ?

⑤ Représenter les fonctions C et R dans le repère ci-dessous.

⑥ Déterminer par lecture graphique le nombre minimum de stylos à produire et vendre pour que l'entreprise commence à faire des bénéfices. Retrouver ce nombre par le calcul.



① Chaque objet coûte $2,50$€ donc $R(x) = 2,5x$.

② (a) Les coûts fixes correspondent à ce que l'on paie même lorsqu'on ne vend aucun stylo.
$C(0) = 1,25 \times 0 + 180 = 180$ donc les coûts fixes sont des 180€.

(b) On sait que Bénéfice = Recette - Coûts donc :
$B(x) = R(x) - C(x) = 2,5x - (1,25x + 180) = 2,5x - 1,25x - 180 = 1,25x - 180$

③ $R(200) = 2,5 \times 200 = 500$, $C(200) = 1,25 \times 200 + 180 = 430$ et $B(200) = R(200) - C(200) = 500 - 430 = 70$.
Lorsque l'entreprise vend 200 stylos, elle réalise un bénéfice de 70€.

④ On résout l'équation $C(x) = 600$.
$C(x) = 600 \iff 1,25x + 180 = 600 \iff 1,25x = 420 \iff x = \frac{420}{1,25} \iff x = 336$
Pour que le coût total s'élève à 600€, l'entreprise doit fabriquer 336 stylos.

⑤ R et C sont deux fonctions affines donc il suffit d'avoir deux points de leur courbe pour les tracer.
$R(0) = 2,5 \times 0 = 0$ et $R(200) = 2,5 \times 200 = 500$
$C(0) = 1,25 \times 0 + 180 = 180$ et $C(200) = 1,25 \times 200 + 180 = 430$

⑥ Graphiquement, la courbe de la recette passe au-dessus de celle des coûts à partir de $x = 144$.
L'entreprise doit donc vendre au moins 144 stylos pour réaliser un bénéfice.
On peut retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $B(x) \geqslant 0$.
$B(x) \geqslant 0 \iff 1,25x - 180 \geqslant 0 \iff 1,25x \geqslant 180 \iff x \geqslant \frac{180}{1,25} \iff x \geqslant 144$

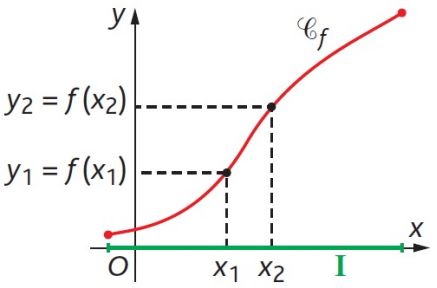
3. Étude qualitative d'une fonction

Définition 2.

La fonction f est **croissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

On dit que la fonction « f **conserve l'ordre** ».

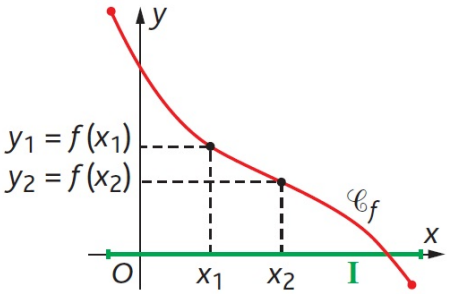


Définition 3.

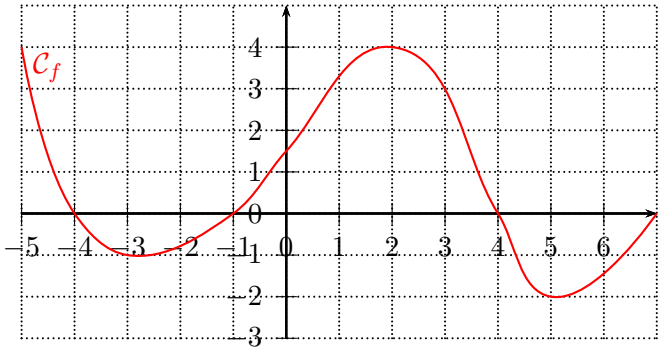
La fonction f est **décroissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

On dit que la fonction « f **change l'ordre** ».



Donner les variations d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est décroissante.



La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-5; -3]$.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-3; 2]$.
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2; 5]$.
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[5; 7]$.

3. 1. Tableau de variations

Le **tableau de variations** d'une fonction est un tableau synthétique regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

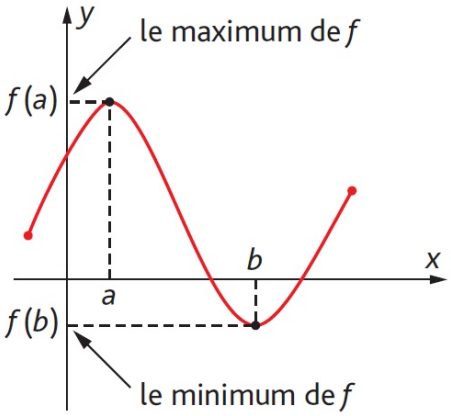
Exemple 3.

x	-5		-3		2		5		7
$f(x)$	4	↘	-1	↗	4	↘	-2	↗	0

3. 2. Extremum

Définition 4.

- **Le maximum d'une fonction** f sur un intervalle I est la plus grande valeur possible des images, atteinte pour un réel a de I. Ainsi, pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(a)$
- **Le minimum d'une fonction** f sur un intervalle I est la plus petite valeur possible des images, atteinte pour un réel b de I. Ainsi, pour tout réel x de I, on a : $f(x) \geq f(b)$



Exemple 4.
Reprenons la fonction f de la page précédente.
Le minimum de la fonction f est -2. Il est atteint en $x = 5$.
Le maximum de la fonction f est 4. Il est atteint en $x = -5$ et en $x = 2$.
Sur l'intervalle $[-5; 2]$, le minimum de la fonction f est -1. Il est atteint en $x = -3$.

3. 3. Tableau de signes

On réunit au sein d'un tableau appelé **tableau de signes** les informations concernant le signe de la fonction f, c'est à dire la position de sa courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple 5.

x	-5		-4		-1		4		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0