

Correction Exercices : Probabilités conditionnelles

EXERCICE 1 :

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants.
On soumet cette population à un test. Parmi les bien portants, 2% ont un test positif.
Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

1. Avec toutes les informations de l'énoncé, compléter le tableau suivant :

	Malades	Bien portants	Total
Test positif	851	582	1433
Test négatif	49	28518	28567
Total	900	29100	30000

Dans les questions suivantes, les résultats sont à arrondir à 10^{-4} près.

2. On choisit, au hasard, une personne de cette population.

On considère les événements :

— T : « Le test est positif pour la personne choisie »

— M : « La personne choisie est malade »

- (a) Traduire par une phrase chacun des événements suivants : $\bar{T}$, $T \cap M$, $\bar{T} \cap M$.

$\bar{T}$: « La personne choisie a un test négatif »

$T \cap M$: « La personne choisie est malade et a un test positif »

$\bar{T} \cap M$: « La personne choisie est malade et a un test négatif »

- (b) Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

Les résultats doivent être arrondis à 10^{-4} près, c'est-à-dire avec 4 chiffres après la virgule.

$$P(\bar{T}) = \frac{28567}{30000} \approx 0,9522$$

$$P(T \cap M) = \frac{851}{30000} \approx 0,0284$$

$$P(\bar{T} \cap M) = \frac{49}{30000} \approx 0,0016$$

- (c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.

La probabilité que la personne choisie soit malade **OU** ait un test positif est égale à :

$$\begin{aligned} P(M \cup T) &= P(M) + P(T) - P(M \cap T) \\ &= \frac{900}{30000} + \frac{1433}{30000} - \frac{851}{30000} \\ &= 0,0494 \end{aligned}$$

- (d) Calculer les probabilités $P_T(M)$ et $P_M(T)$ et les interpréter par une phrase.

$$P_T(M) = \frac{851}{1433} \approx 0,5939$$

La probabilité que la personne choisie soit malade **SACHANT QUE** son test est positif

est égale à 0,5939.

$$P_M(T) = \frac{851}{900} \approx 0,9456$$

La probabilité que la personne choisie ait un test positif **SACHANT QU'**elle est malade est égale à 0,9456.

- (e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.
Écrire cette probabilité avec la nouvelle notation.

La probabilité que la personne choisie soit malade **SACHANT QUE** son test est négatif est égale à $P_{\bar{T}}(M) = \frac{49}{28567} \approx 0,0017$.

EXERCICE 2 :

Lors d'un marathon inter-entreprises, 200 participants ont été contrôlés.

Parmi eux, 20 ont eu un résultat « positif » au test anti-dopage.

A la suite d'un examen plus poussé, on se rend compte que 5 coureurs parmi les 20 testés positif n'avaient pris aucun produit dopant et 2 coureurs parmi les tests négatifs avaient pris des produits dopants.

1. Compléter le tableau de répartition des coureurs :

	Coureur dopé	Coureur non dopé	Total
Testé positif	15	5	20
Testé négatif	2	178	180
Total	17	183	200

2. On choisit un coureur au hasard parmi les 200 marathonniens.

On considère les événements :

— D : « Le coureur choisi s'est dopé »

— N : « Le coureur choisi est négatif »

- (a) Quelle est la probabilité qu'un coureur soit testé positif ?

La probabilité qu'un coureur soit testé positif est égale à $P(\bar{N}) = \frac{20}{200} = 0,1$.

- (b) Calculer la probabilité $P(\bar{D})$.

$$P(\bar{D}) = \frac{183}{200} = 0,915$$

- (c) Exprimer par une phrase chacun des événements $D \cap \bar{N}$ et $\bar{D} \cap N$.

$D \cap \bar{N}$: « Le coureur choisi est dopé **ET** a un test positif »

$\bar{D} \cap N$: « Le coureur choisi n'est pas dopé **ET** a un test négatif »

- (d) Calculer la sensibilité $P_D(\bar{N})$ et la spécificité $P_{\bar{D}}(N)$ de ce test.

$$P_D(\bar{N}) = \frac{15}{17} \approx 0,882$$

La sensibilité de ce test est d'environ 0,882.

$$P_{\bar{D}}(N) = \frac{178}{183} \approx 0,973$$

La spécificité de ce test est d'environ 0,973.

(e) Calculer $P(D \cap \overline{N}) + P(\overline{D} \cap N)$ appelé efficacité du test.

$$P(D \cap \overline{N}) + P(\overline{D} \cap N) = \frac{15}{200} + \frac{178}{200} = 0,965$$

L'efficacité de ce test est de 0,965.

EXERCICE 3 :

Un club de vacances est constitué de 300 adhérents qui pratiquent chacun une activité et une seule parmi les trois activités suivantes : la natation, l'escalade ou le VTT.

- 35% des adhérents sont des filles.
- 30% des adhérents pratiquent le VTT.
- 10% des adhérents pratiquent l'escalade et, parmi eux, 60% sont des garçons.
- Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT.

1. Compléter le tableau suivant :

	Natation	Escalade	VTT	Total
Fille	63	12	30	105
Garçon	117	18	60	195
Total	180	30	90	300

2. On choisit un adhérent au hasard et on considère les événements suivants :

- N : « L'adhérent pratique la natation »
- E : « L'adhérent pratique l'escalade »

— V : « L'adhérent pratique le VTT »

— F : « L'adhérent est une fille »

(a) Calculer la probabilité $P(V)$.

$$P(V) = \frac{90}{300} = 0,3$$

(b) Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi soit un garçon ?

La probabilité que l'adhérent choisi soit un garçon est égale à $P(\overline{F}) = \frac{195}{300} = 0,65$.

(c) Déterminer la probabilité que l'adhérent choisi soit une fille qui pratique le VTT.

La probabilité que l'adhérent choisi soit une fille qui pratique le VTT est égale à $P(F \cap V) = \frac{30}{300} = 0,1$.

(d) Calculer la probabilité que l'adhérent choisi soit un garçon ou qu'il pratique l'escalade.

La probabilité que l'adhérent choisi soit un garçon **OU** qu'il pratique l'escalade est égale à :

$$\begin{aligned} P(\overline{F} \cup E) &= P(\overline{F}) + P(E) - P(\overline{F} \cap E) \\ &= \frac{195}{300} + \frac{30}{300} - \frac{18}{300} \\ &= 0,69 \end{aligned}$$

(e) Calculer la probabilité $P_F(E)$.

$$P_F(E) = \frac{12}{105} \approx 0,114$$

(f) Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un garçon sachant qu'il pratique la natation.

La probabilité que l'adhérent soit un garçon sachant qu'il pratique la natation est égale à :

$$P_N(\overline{F}) = \frac{117}{180} = 0,65$$